EUCLIDIS

DATORUM LIBER

CUM

ADDITAMENTO,

NECNON

TRACTATUS ALII AD GEOMETRIAM

PERTINENTES.

IN USUM JUVENTUTIS ACADEMICÆ.

CURAVIT ET EDIDIT

SAMUEL, EPISCOPUS ASAPHENSIS.

OXONII:

E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO.

1803.

INDEX

EORUM, QUÆ IN HOC VOLUMINE CONTINENTUR.

* Quæ asterismo uspiam notantur auctorem habent Samuelem, Episcopum Asaphensem.

LECTORI.

TANDEM aliquando in lucem prodit, e tribus iis Voluminibus ultimum, quæ in nos ſuſcepimus evulganda; eo nimirum conſilio, ut Juventuti Academicæ ad manus eſſent, e quibus Matheſeos Elementa recte et legitime ediſcerent, tum ſcientiæ ipſius ratione habitâ, tum etiam παιδείας illius, quâ ingenuos adoleſcentes, et literis humanioribus deditos erudiri ſemper æquum eſt. Prodit, inquam, e tribus iis Tomis jam ultimus, cum tamen eo ordine non perlegendus ſit, ſi quis ſeriatim Opuſcula hæc noſtra, et maximo ſuo commodo evolvere voluerit.

Ita enim, ut fuſius alibi docuimus, id optime fiet, ſiquidem ita ordinentur omnia, ut Tomi primi locum occupet ille, in quo curas noſtras in libros Elementorum Euclidis contulimus; pro ſecundo habeatur hic, qui noviſſime excuſus eſt; tertius denique ſit ille, quem ſermone vernaculo conſcripſimus. Et quoniam omnes publici juris jam facti ſunt, Indicem quoque eorum, quæ in ſingulis tractantur, juxta præſcriptam ordinationem uno intuitu conſpiciendum jam apponimus.

TOM. I.

Euclidis Elementorum Libri priores XII. ex Commandini et Gregorii verfionibus Latinis.

TOM. II.

PARS I.

I. Euclidis Data.

*II. Additamentum Libri Datorum Euclidis.

III. Problematum Delectus cum Refolutione eorum Geometricâ.

PARS II.

*I. Sphæricorum Liber Singularis.

II. Archimedis Circuli Dimenfio, cum Commentariis Eutocii Afcalonitæ.

III. Cribrum Eratofthenis ad Numeros Primos Omnes Ordine inveniendos.

*IV. De Numeris Primis et Compofitis.

V. Joannis Keillii De Naturâ et Arithmeticâ Logarithmorum Tractatus Brevis, cum Notis et Appendice.

TOM. III.

I. The Arithmetic of Fractions.

II. Trigonometry, Plane and Spherical, in Three Books:

Book I. Plane Trigonometry.

Book II. Properties of Spherical Triangles.

Book III. The Trigonometry of the Sphere.

III. Of the Projections of the Sphere, in Four Books:

Book I. Of Cylindric Sections.

Book II. Of the Orthographic Projection.

Book III. Of the Stereographic Projection.

Book IV. Of the Gnomonic Projection.

IV. Of the Figure of the Earth as deducible from Obfervation.

Pro

Pro ſingulis etiam Voluminibus et hic loci adjicere non gravamur Erratorum notitiam, quæ in ea irrepſiſſe deprehendimus. Cum enim ſatius omnino fuiſſet, ſi mendis hiſce caruerint, proximo loco honeſtum eſſe ducimus, non diſſimulare, ſi quid aliter evenerit, ſed ubique quomodo corrigendum ſit, oſtendere.

ERRATA.

VOL. I.

Pag.	14 lin.	17, *pro* G H *lege* C H
——	15 ——	10, *pro* duabus *lege* duobus
——	20 ——	1, *pro* ponatur *lege* Exponatur
——	46 ——	10, *dele* Sed et rectangulum
——	56 ——	4, *pro* fiunt lateribus *lege* fiunt a lateribus
——	63 ——	24, *pro* E *lege* F
——	75 ——	36, *pro* duabus *lege* duobus
——	80 ——	34, *pro* habent. Sed *lege* habent; ſed
——	130 ——	26, *pro* G *lege* H
——	147 ——	28, *pro* conditione *lege* conditioni
——	167 ——	17, *pro* ſumpti *lege* ſumptis
——	169 ——	7, *pro* angulem *lege* angulum
——	262 ——	39, *pro* Def. 1. primi *lege* Def. 1. hujus.
——	267 ——	25, *pro* eirt *lege* erit
——	281 ——	18, *pro* quædam A B *lege* quædam rationalis A B
——	291 ——	23, *pro* poteſt *lege* poſſit
——	347 ——	24, *pro* erunt *lege* erit
——	393 ——	penult. *pro* continentur *lege* continetur
——	408 ——	14, *pro* ad *lege* ab
——	412 ——	21, *pro* ſuperficie, mutua *lege* ſuperficie planâ, mutua †

† * Nempe in Græcis, in definitione anguli ſolidi excidiſſe arbitramur adjectivum ἐπιπέδῳ, ſubſtantivo ἐπιφανείᾳ apponendum, ut definitio generalis fiat. Etenim ad *Coni* verticem (ex. gr.) angulus proculdubio eſt ſolidus, quem rectæ lineæ innumeræ conſtituunt, ad punctum unum, coni verticem, collectæ; quæ quidem rectæ in eâdem omnes ſunt ſuperficie, minime vero in eâdem *planâ*, in *conicâ* enim ſuperficie: et alii complures ſunt anguli ſolidi, quorum par eſt ratio. Quos tamen definitione ſuâ Euclidem excludere voluiſſe haud putamus; præſertim cum angulus quiſque ſolidus ad coni verticem, aliique complures,

Pag. 427 lin. 30, *pro* B C *lege* D C
—— 433 —— penult. *pro* Simpfonus *lege* Simfonus
—— 477 —— 18, *pro* A E C G *lege* A B C G.

VOL. II.

Pars I.

Pag. 31 lin. 23, *pro* puncto A *lege* puncto L
—— 70 —— 30, *pro* fecundaad *lege* fecunda ad
—— 77 —— 35, *pro* E B *lege* E D
—— 96 —— 35, *pro* occurrat *lege* occurret
—— 106 —— penult. *pro* tam *lege* tum

Pars II.

Pag. 67 lin. 28, *pro* iu *lege* in
—— 118 —— 3, *pro* proportionaium *lege* proportionalium
—— 120 —— ult. *pro* fcripiis *lege* fcriptis

VOL. III.

Page 84 line 5, *for* five *read* fix
—— 115 —— 24, *for* parts *read* arcs
—— 116 —— 5, *for* degrees *read* parts
—— 135 —— 19, *for* L C *read* L G
—— 137 —— 10, *for* A D *read* B D
—— 143 —— 5, *for* Archimedes; *read* Archimedes,
—— 145 —— 10, *for* I *read* I'
—— 147 —— 12, *for* $\frac{6x^5}{r^3}$ *read* $\frac{6x^5}{r^4}$
—— 150 —— 8, *after* impoffible *infert* provided $27q^2$ does not exceed $4p^3$
—— 212 —— 20, *for* fecond *read* firft
—— 216 —— laft, *for* Sect. I. *read* Book ii.
—— 217 —— 8, *for* firft Section *read* fecond Book

plures, qui fuperficiebus non planis continentur, aliis, qui planis continentur, æquales fint.

Illud autem accurate animadvertendum—Alteram, quæ ponitur anguli folidi, definitionem, utpote planis comprehenfi, ita ad conicum accommodari, fi angulorum planorum numerus infinite augeri intelligatur, magnitudine cujufque fingulatim infinite imminutâ. Cæterum infcite admodum Simfonus definitionum anguli folidi, quas duas Euclides pofuit, alterâ repudiatâ, alteram illam retinere maluit, quæ vel minus univerfalis eft, vel, fi aliter, ea faltem de quâ, univerfalem effe, non æque manifeftum eft.

Page

Page 306 line 30, *for* of the centre *read* of c the centre of the primitive
—— 310 *Plate* iii. *in Fig.* 1 *and* 2, *at the remoteſt angles from the centre of the Figure, for* η *read* x.
—— 311 line 8, *for* theſe *read* thoſe
—— 362 —— 9, *for* line D N *read* line G N
—— 364 —— 6, *for* pole. *read* pole;
—— 382 —— 3, *for* muſt be *read* is
—— 385 —— 12, *for* at G *read* at K
—— 392 —— 14, *for* l t *read* l T

Et hæc quidem ſunt, quantum intelleximus in quibus vel nos lapſi ſumus, vel typographi, qualia quam difficile evitare ſit, nôrunt ii, (fortaſſe non ſuſpicantur alii) quibus ſupputationes aut demonſtrationes Mathematicas typis edere contigerit; præſertim ſi plagulas omnes non a prælo quod aiunt ſudantes, ſed e longinquo tranſmiſſas, excipere neceſſe ſit, ut correctoris manus iis adhibeatur.

Interea autem, pro quo etiam exoranda eſt venia, gravius aliquod eſſe confiteor; nam et habeo quod adjiciendum eſt non de mendis Typographicis, ſed de omiſſis iis, quæ omnino extare debuerunt, et tamen prorſus non extant, in tractatu noſtro de Trigonometriâ; licet quomodo, quâ incuriâ, aut quâ fortunâ ea non inſeruimus, neque operæ pretium eſt jam exquirere, neque, ſi tentarem, rationes ullas vel mihimet ipſi ſatis probabiles afferre poſſim; ut neque quod factum eſt infectum ullo modo fieri poteſt.—Ita igitur ſe res habet, plane admirabundum, neque tale aliquid ſuſpicantem, me deprehendiſſe, deeſſe ſolutiones caſuum duorum, ſecundi ſcilicet et tertii Problematis II. de Triangulis Sphæricis obliquangulis.

Omiſſa-

Omissarum autem locum male supplent aliorum duorum noni et decimi solutiones.

Sero licet itaque, sed tamen, quod etiam nunc pote esse mihi gratulor, priusquam manum de tabulâ, solutiones quæ desiderantur adjicio, quas etiam seorsim imprimi curabimus, et gratis iis in manus tradi, qui sibi Volumen illud, in quo desiderantur, comparaverint, ne fraudi iis fiat, quod per nos stetit, ut mancum sit et imperfectum, quod sibi coemerint. Anglico autem sermone exposita sunt, quæ ibi omisimus, quoniam et ita conscripti sunt nostri de Trigonometriâ libri.

Jamque, opere quod suscepimus exacto, nequeo non palam profiteri (quod ni fecerim metuendum profecto ne ingratus audiam) quantum adjumenti in hisce perficiendis mihi ultro contulerit Vir doctissimus, studiis et amicitiâ conjunctissimus Gulielmus Jackson, S. T. P. Æd. Christi apud Oxonienses Canonicus. Eo enim per omnia optimo judice et censore usus sum mearum lucubrationum. Is id etiam negotii in se suscepit, ut ea, quæ de Cribro Eratosthenis multis abhinc annis apud Ephemeridas Societatis Regiæ Londinensis patrio sermone evulgavimus, in compendium redigeret, et Latinitate donaret. In præfationibus etiam concinnandis, multisque aliis, quibus, aliis negotiis implicito, minus vacare licuit, egregiam mihi operam navavit. Particeps igitur laborum in laudis etiam partem veniat.

S. ASAPHENS.

Dabamus Londini
Prid. Id. Jul. MDCCCIII.

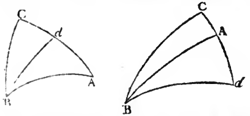
Omitted in the Errata of the Volume of English Tracts.

It yet remains to correct a very material error in this third Volume. In the Spherical Trigonometry, the solutions of two cases of oblique-angled Spherical Triangles, viz. the second and third of Problem II, are wanting; those of Case 9 and 10 (p. 213) being erroneously given in page 211 and 212 as the solutions of Case 2 and 3. The error must be thus corrected.

For the solution of Case 2, in the four lowest lines of p. 211, and the four uppermost of page 212, substitute the following.

From the point B draw the arc B *d* perpendicular to A C.

In the right angled triangle B *d* A Rad. : cosin B A



= tang. A : cot. A B *d* (by Case 6 of right angled triangles) which gives the angle A B *d*.

And tang. B C : tang. B A = cosin A B *d* : cosin C B *d* (by the IVth analogy) which gives the angle C B *d*. And the sum or difference of the two A B *d*, C B *d* is the angle sought A B C.

For the solution of Case 3, in the 7th and four following lines of page 212, substitute the following.

The arc B *d* being drawn as before perpendicular to A C, in the right angled triangle B *d* A,

Rad. : cosin A = tang. B A : tang. A *d* (by Case 5 of right angled triangles) which gives A *d*.

And cosin B A : cosin A *d* = cosin B C : cosin C *d* (by the second of the four analogies) which gives C *d*.

And the sum or difference of A *d* and C *d* is A C.

EUCLIDIS

DATA.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

DATA magnitudine dicuntur, ſpatia, lineæ, angulique, quibus æqualia poſſumus invenire.

II.

Ratio dari dicitur, cui poſſumus eandem invenire inter magnitudines datas.

* SCHOLION.

Huic definitioni voces "inter magnitudines datas" adjiciendas exiſtimavimus. Rationes enim non datarum magnitudinum eædem eſſe poſſunt, quæ non ſunt datæ: Ut ſi tres ſint rectæ proportionales, ratio primæ ad tertiam eadem erit, quæ quadrati ex primâ ad quadratum ex ſecundâ. Idque ſemper obtinebit, quæcunque fuerit antecedentis ad conſequentem ratio. Sed nullo modo exinde ſequitur rationem vel primæ ad tertiam, vel quadrati ex primâ ad quadratum ex ſecundâ dari. Inter ſe collatæ nunquam reperientur diverſæ, neque tamen idcirco alterutra definita erit. Ratio autem ita demum dabitur, ſi inter datas magnitudines eadem reperta fuerit.

III.

Rectilineæ figuræ ſpecie dari dicuntur, quarum et ſinguli anguli dati ſunt, et laterum rationes ad invicem etiam datæ.

B IV.

IV.

Poſitione dari dicuntur, puncta, lineæ, ſpatia, et anguli, quæ eundem ſitum ſemper obtinent.

V.

Circulus magnitudine dari dicitur, cujus datur ea quæ ex centro magnitudine.

VI.

Poſitione et magnitudine dari dicitur circulus, cujus centrum quidem datur poſitione, et ea quæ ex centro magnitudine.

VII.

Circuli ſegmenta magnitudine dari dicuntur, in quibus et anguli et ſegmentorum baſes magnitudine data ſunt.

VIII.

Poſitione et magnitudine dari dicuntur circuli ſegmenta, in quibus anguli magnitudine dati ſunt, atque ſegmentorum baſes poſitione ſimul ac magnitudine.

IX.

Magnitudo magnitudine major eſt, datâ; quando, ablatâ datâ, reliqua eidem æqualis eſt.

X.

Magnitudo magnitudine minor eſt, datâ; quando, adjunctâ datâ, tota eidem æqualis eſt.

XI.

Magnitudo magnitudine major eſt, datâ *magnitudine*, quam in ratione: quando, ablatâ datâ, reliqua ad eandem habet rationem datam.

XII.

Magnitudo magnitudine minor eſt, datâ, quam in ratione: quando, adjunctâ datâ, tota ad eandem habet rationem datam.

XIII.

Deducta linea recta eſt, quæ a dato puncto ad datam poſitione rectam in angulo dato ducitur.

XIV.

Educta vero linea recta eſt, quæ a dato puncto in rectâ poſitione datâ in dato ad eandem angulo protrahitur.

XV.

Contra poſitione datam eſt recta, quæ per datum punctum datæ poſitione rectæ parallela ducitur.

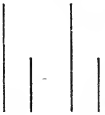
PRO-

PROPOSITIO I. [I.]

Datarum magnitudinum ratio ad invicem datur.

Sint datæ magnitudines A, B: dico rationem ipſius A ad B datam eſſe.

Quoniam enim datur magnitudo A, poſſumus illi invenire æqualem[a]. Inveniatur, et eſto C. Rurſus cum data ſit magnitudo B, illi poſſumus invenire æqualem. Inveniatur, et eſto D. Quoniam igitur A æqualis eſt ipſi C, et B ipſi D; erit ut A ad C, ita B ad D: permutando igitur erit ut A ad B, ita C ad D[b]. Ratio igitur ipſius A ad B data eſt[c]; huic enim eadem inventa eſt, ſc. ratio ipſius C ad D. *Q. E. D.*


A B C D

[a] Def. 1. dat.
[b] 16. quinti.
[c] Def. 2. dat.

PROP. II. [II.]

Si data magnitudo ad aliam aliquam magnitudinem rationem datam habeat; datur quoque alia illa magnitudo.

Data enim magnitudo A ad aliam magnitudinem B habeat rationem datam: dico et ipſam B magnitudinem datam eſſe.

Quoniam enim data eſt A, poſſumus illi æqualem invenire[d]. Inveniatur, et eſto C. Et quoniam data eſt ratio ipſius A ad B; (ita enim ſupponitur,) poſſumus huic æqualem invenire. Inveniatur, et eſto ratio ipſius C ad D. Et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D; æqualis autem eſt A ipſi C; æqualis igitur eſt et B ipſi D[e]. Itaque magnitudo B data eſt[d]; illi enim æqualis inventa eſt D. *Q. E. D.*


A B C D

[d] Def. 1. dat.
[e] 14. quinti.

[III.] PROP. III.

Si quotlibet datæ magnitudines componantur; quæ ex iis componitur magnitudo, data erit.

Componantur enim quotlibet magnitudines datæ A B, B C: dico dari etiam magnitudinem A C, quæ ex ipsis A B, B C componitur.

Quoniam enim datur A B, possumus illi invenire æ-
[e] Def. 1. dat. qualem [e]. Inveniatur, et esto D E. Rursus quia datur



B C, possumus illi invenire æqualem. Inveniatur et esto E F. Quoniam igitur æqualis est A B ipsi D E, atque B C ipsi E F: erit et tota A C toti D F æqualis. Itaque data est A C [e]; illi enim æqualis inventa est magnitudo D F. *Q. E. D.*

[IV.] PROP. IV.

Si a datâ magnitudine data magnitudo auferatur; etiam reliqua magnitudo data erit.

A datâ enim magnitudine A B auferatur data magnitudo A C: dico et reliquam magnitudinem C B datam esse.

Quoniam enim data est A B, possumus illi invenire
[f] Def. 1. dat. æqualem [f]. Inveniatur, et esto D F. Rursus quia data



est A C, possumus illi invenire æqualem. Inveniatur, et esto D E. Quoniam igitur magnitudo A B quidem ipsi D F, magnitudo autem A C ipsi D E æqualis est: erit et reliqua C B reliquæ E F æqualis. Itaque data est C B [f]; æqualis enim ipsi inventa est E F. *Q. E. D.*

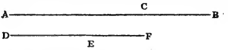
PROP.

PROP. V. [V.]

Si magnitudo ad fui ipfius aliquam partem habeat rationem datam; etiam ad reliquam habebit rationem datam.

Magnitudo enim A B ad fui ipfius partem aliquam A C habeat rationem datam: dico illam etiam ad reliquam B C habere rationem datam.

Exponatur enim data magnitudo D F. Quoniam autem ratio magnitudinis A B ad magnitudinem A C



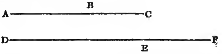
data eft; fiat huic eadem ratio ipfius D F ad D E. Ergo data eft ratio ipfius D F ad D E[g]. Eft autem D F data. [g] Def. 1.
Ergo data eft D E[h]: quare et reliqua E F data eft[i]. [h] 2. dat.
Data autem eft D F; igitur ratio ipfius D F ad F E data [i] 4. dat.
eft[k]. Quoniam vero eft ut D F ad D E, ita A B ad A C[l]. [k] 1. dat.
Ergo per converfionem rationis eft ut D F ad F E, ita [l] Per conftruct.
A B ad B C[m]. Eft autem ratio ipfius D F ad F E data, [m] Cor. 19. quinti.
ut oftenfum eft. Quare et magnitudinis A B ad B C ratio eft data. *Q. E. D.*

PROP. VI. [VI.]

Si componantur duæ magnitudines, habentes ad invicem rationem datam; et ea, quæ ex iis componitur, magnitudo ad utramque rationem datam habebit.

Componantur enim duæ magnitudines A B, B C, habentes ad invicem rationem datam: dico quod tota A C ad utramque A B, B C rationem habet datam.

Exponatur enim data magnitudo D E. Quoniam vero ratio ipfius A B ad B C data eft; fiat huic eadem



ratio ipfius D E ad E F. Ratio igitur ipfius D E ad E F eft data: igitur utraque magnitudinum D E, E F data eft[n]. Quare et D F, quæ ex eis componitur, data[o]. [n] 2. dat. [o] 3. dat.

 Quare

[o] 1. dat. Quare ipſius D F ad utramque D E, E F ratio eſt data [o]. Quoniam autem eſt ut A B ad B C, ita D E ad E F;
[p] 18. quinti. componendo igitur erit ut A C ad B C, ita D F ad F E [p];
[q] Cor. 19. quinti. et convertendo ut A C ad A B, ita D F ad D E [q]. Et quoniam eſt ut D F ad utramque D E, E F, ita A C ad utramque A B, B C: ipſius igitur A C ad utramque A B, B C ratio eſt data. *Q. E. D.*

Cor. * Et ſi dividatur magnitudo in partes duas, ad quas datas rationes habeat; partium inter ſe ratio data erit.

[VII.]

PROP. VII.

Si data magnitudo in datâ ratione ſecetur; utrumque ſegmentorum datum eſt.

Magnitudo enim data A B ſecetur in ratione datâ, nempe ipſius A C ad C B: dico utramque ipſarum A C, C B datam eſſe.

Quoniam enim data eſt ratio ipſius A C ad C B; igitur ratio quoque ipſius A B ad utramque A C, C B data



[r] 6. dat. erit [r]. Datur autem A B; igitur utraque ipſarum A C,
[s] 2. dat. C B data eſt [s]. *Q. E. D.*

Cor. 1.* Et ſi datæ magnitudini adjiciatur quædam, et tota ad magnitudinem adjectam datam rationem habeat; data eſt adjecta magnitudo.

Datæ magnitudini A B adjiciatur B C, et A C ad C B proportionem datam habeat. Dico magnitudinem B C



[t] Cor.* 6. dat. datam eſſe. Propter rationem A C ad C B datam, dividendo ratio A B ad B C data [t]. Data autem A B [u]. Ergo
[u] ex hyp. B C data [s]. *Q. E. D.*

Cor. 2.* Si duæ magnitudines proportionem inter ſe datam habeant, et magnitudinum ſumma vel differentia data ſit; utraque data eſt.

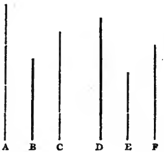
PROP.

PROP. VIII. [VIII.]

Quæ ad idem datam rationem habent; etiam ad invicem datam rationem habebunt.

Utraque enim magnitudinum A, C ad magnitudinem B habeat rationem datam: dico magnitudinem A ad magnitudinem C datam quoque rationem habere.

Sit enim data magnitudo D. Quoniam vero ratio ipsius A ad B data est; fiat huic eadem ratio ipsius D ad E. Est autem D data; igitur et E data erit [x]. Rursus quoniam ipsius B ad C data est ratio; fiat huic eadem ratio ipsius E ad F. Est autem E data; quare et F data est [x]. At vero data est D; ergo ipsius D ad F ratio est data [y]. Cumque sit ut A ad B, ita D ad E; atque ut B ad C, ita E ad F: ex æquo igitur erit ut A ad C, ita D ad F [z]. Est autem ratio ipsius D ad F data. Quare et ratio ipsius A ad C data est. *Q. E. D.*



x 2. dat.

y 1. dat.

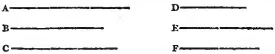
z 22. quinti.

PROP. IX. [IX.]

Si duæ pluresve magnitudines ad invicem habeant rationes datas; habeant autem illæ magnitudines ad alias quasdam magnitudines rationes datas, etsi non easdem: illæ aliæ magnitudines etiam ad invicem rationes datas habebunt.

Duæ enim pluresve magnitudines A, B, C habeant ad invicem rationes datas; habeant autem et illæ eædem magnitudines A, B, C ad alias quasdam magnitudines D, E, F rationes datas, non easdem tamen: dico ipsas magnitudines D, E, F ad invicem rationes habere datas.

Quoniam enim ratio ipsius A ad B data est, et ratio



ipsius A ad D etiam data; ratio ipsius D ad B data erit [a]. a 8. dat.

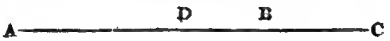
Sed ipsius B ad E ratio est data. Ergo data etiam est
b 8. dat. ratio ipsius D ad E [b]. Rursus, quoniam ratio ipsius B ad C est data, ipsiusque B ad E ratio etiam data; ratio quoque ipsius E ad C data erit [b]. Ipsius autem C ad F ratio est data. Quare et ratio ipsius E ad F data est. Ergo D, E, F habent ad invicem rationes datas. *Q. E. D.*

[X.] PROP. X.

Si magnitudo magnitudine major fuerit, datâ, quam in ratione; etiam utraque simul eâdem major erit, datâ, quam in ratione. Item si utraque simul eâdem major fuerit, datâ, quam in ratione; aut reliqua eâdem major erit, datâ, quam in ratione; aut reliqua una cum consequente, ad quam altera datam habet rationem, data erit.

Magnitudo enim A B magnitudine B C major sit, datâ, quam in ratione: dico quod simul utraque A C eâdem B C major est, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim A B ipsâ B C major est, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo A D: ergo reliquæ



c Def. 11. dat. D B ad B C ratio est data [c]: et componendo igitur, ipsius
d 6. dat. D C ad B C ratio est data [d]. Sed et data est magnitudo A D. Quare A C ipsâ C B major est, datâ, quam in ratione.

Rursus magnitudo A C magnitudine B C major sit, datâ, quam in ratione: dico reliquam A B eâdem B C aut majorem esse, datâ, quam in ratione; aut ipsam quidem A B una cum consequente, ad quam B C rationem datam habet, datam esse.

Quoniam enim magnitudo A C magnitudine B C major est, datâ, quam in ratione; auferatur data mag-



nitudo. Data autem magnitudo aut minor est magnitudine A B, aut major. Sit primum minor, et sit A D. Ergo reliquæ D C ad C B ratio est data: dividendo igitur,

tur, ipsius D B ad B C ratio est data[d]. Data autem est magnitudo A D. Quare magnitudo A B magnitudine B C major est, datâ, quam in ratione. [d] Cor. * 6. dat.

Sed sit data magnitudo major magnitudine A B, et ponatur ipsi æqualis A E; reliquæ igitur E C ad C B ratio est data: ideoque invertendo, ipsius B C ad E C ratio est

A————B————E————C

data. Quare convertendo, ipsius B C ad B E ratio est data[e]. Data autem est E B una cum B A, quia tota A E data est. Ergo ipsa A B una cum consequente, ad quam B C rationem datam habet, data est. *Q. E. D.* [e] 5. dat.

PROP. XI. [XI.]

Si magnitudo magnitudine major sit, datâ, quam in ratione; eadem major erit utrâque simul, datâ, quam in ratione. Item si eadem major sit utrâque simul, datâ, quam in ratione; eadem quoque alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Magnitudo enim A B magnitudine B C major sit, datâ, quam in ratione: dico eandem A B ipsâ A C majorem esse, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim magnitudo A B magnitudine B C major est, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo A D: igitur reliquæ D B ad B C ratio data est[f]. [f] Def. 11. dat.

A————E————D————B————C

Invertendo ergo et componendo, ipsius D C ad D B data est ratio[g]. Fiat huic eadem ratio ipsius A D ad D E. Itaque totius A C ad totam E B ratio data est[h]. Et invertendo ratio E B ad A C data. Est autem A D data; et ratio ipsius A D ad D E. Ergo D E data est[i]. Quare reliqua A E data est[k]. Quare A B ipsâ A C major est, datâ, quam in ratione[f]. [g] 6. dat. [h] 12. quinti. [i] 2. dat. [k] 4. dat.

Deinde vero A B utrâque A C major sit, datâ, quam in ratione: dico ipsam A B alterâ B C majorem esse, datâ, quam in ratione.

Auferatur data magnitudo A E; reliquæ ergo E B ad A C data est ratio. Quare et ipsius A C ad E B data est ratio. Fiat huic eadem ratio ipsius A D ad D E: itaque ipsius



ipsius A D ad D E ratio data est: convertendo ergo ipsius A D ad A E ratio data est[l]; et invertendo ratio ipsius A E ad A D data est. Data autem est A E[m]. Quare et A D data[n]. Quoniam vero totius A C ad totam E B ratio data est; est autem A D ad E D ut A C ad E B: erit et reliquæ C D ad reliquam B D ratio eadem, et data[o]: ideoque dividendo ipsius C B ad B D ratio data est[p]. Quare et ipsius D B ad B C ratio data est. Data autem est A D. Quare A B ipsâ B C major est, datâ, quam in ratione. *Q. E. D.*

[l] 5. dat.
[m] ex hyp.
[n] 2. dat.
[o] 19. quinti.
[p] Cor. 6. dat.

PROP. XII.

[XII.] *Si fuerint tres magnitudines, quarum prima cum secundâ data sit, atque etiam secunda cum tertiâ; aut prima tertiæ æqualis est, aut altera alterâ major est, datâ.*

Sint tres magnitudines A B, B C, C D, et A B quidem cum B C data sit sc. A C; atque etiam B C cum C D sit data, nempe B D: dico magnitudinem A B aut magnitudini C D æqualem esse, aut alteram alterâ majorem esse, datâ.

Quoniam enim utraque magnitudinum A C, B D data est: datæ magnitudines æquales sunt inter se, aut inæ-



quales. Sint primum æquales; itaque æqualis est A C ipsi B D. Communis auferatur B C; reliqua igitur A B reliquæ C D æqualis est.

Sed non sint inter se æquales; sitque A C major ipsâ B D, et ponatur ipsi B D æqualis C E. Data autem est B D. Ergo data est et C E. Est autem tota A C data[q].

[q] ex hyp.



Quare et reliqua A E data est[r]. Quoniam vero æqualis est E C ipsi B D, communis auferatur B C: reliqua ergo B E reliquæ C D æqualis est. Data autem est magnitudo A E. Quare A B ipsâ C D major est, datâ[s]. *Q. E. D.*

[r] 4. dat.
[s] Def. 9. dat.

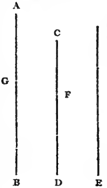
PROP.

PROP. XIII. [XIII.]

Si fuerint tres magnitudines, et earum prima ad ſecundam habeat rationem datam, ſecunda autem tertiâ major ſit, datâ, quam in ratione; prima quoque tertiâ major erit, datâ, quam in ratione.

Sint tres magnitudines A B, C D, E; et A B quidem ad C D habeat rationem datam; magnitudo autem C D magnitudine E major ſit, datâ, quam in ratione: dico quod magnitudo A B magnitudine E major eſt, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim C D ipſâ E major eſt, datâ, quam in ratione, auferatur data magnitudo C F: igitur reliquæ D F ad E ratio eſt data[s]. Cumque ratio ipſius A B ad C D data ſit[t]; fiat huic eadem ratio ipſius A G ad C F: itaque ratio ipſius C F ad A G data eſt. Eſt autem C F data. Ergo A G data eſt[u]. Cum vero A B ſit ad C D, ut A G ad C F, idcirco erit reliqua B G ad reliquam D F, ut A B ad C D[x]; id eſt, in ratione datâ. Ipſius autem D F ad E ratio data eſt[t]. Quare et ipſius G B ad E ratio data eſt[y]. Data autem eſt A G. Ergo A B ipſâ E major eſt, datâ, quam in ratione. *Q. E. D.*

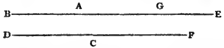


[s] Def. 11. dat.
[t] ex hyp.
[u] 2. dat.
[x] 19. quinti.
[y] 8. dat.

PROP. XIV. [XIV.]

Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; utrique autem illarum adjiciatur data magnitudo: totæ ad invicem aut habebunt rationem datam, aut altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Duæ enim magnitudines A B, C D ad invicem habeant rationem datam, et adjiciatur utrique earum data magnitudo, tam A E, quam C F: dico quod totæ E B, F D



aut habent ad invicem rationem datam, aut altera alterâ major eſt, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim data eſt utraque E A, F C, ipſius quoque E A ad F C data eſt ratio[z]. Et igitur ſi hæc ratio eadem

[z] 1. dat.

eadem fit, quæ ipfius A B ad C D; totius quidem E B ad
[a] 12. quinti. totam F D ratio eadem erit et data [a]. At vero non fit eadem datarum E A, F C, quæ ipfarum A B, C D ratio; et fiat ut A B ad C D, ita G A ad C F: itaque ratio ipfius G A ad C F data eft, necnon ipfius G B ad F D [a]. Eft
[b] 2. dat. autem magnitudo C F data. Quare A G data eft [b]. Sed
[c] 4. dat. et ipfa E A data eft. Ergo etiam reliqua E G data eft [c]. Quare magnitudo E B magnitudine F D major eft, datâ,
[d] Def. 11. dat. quam in ratione [d]. *Q. E. D.*

[XV.] PROP. XV.

Si duæ magnitudines habeant ad invicem rationem datam, et ab utrâque earum auferatur data magnitudo: reliquæ magnitudines aut ad invicem habebunt rationem datam; aut altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Duæ enim magnitudines A B, C D habeant ad invicem rationem datam, et auferatur ab utrâque earum data magnitudo; a magnitudine quidem A B magnitudo A E, a magnitudine autem C D magnitudo C F: dico quod reliquæ E B, F D aut habent ad invicem rationem datam, aut altera alterâ major eft, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim utraque A E, C F data eft, ratio etiam ipfius A E ad C F data eft. Si igitur ratio hæc eadem



fit, quæ ipfius A B ad C D; erit et reliquæ E B ad re-
[e] 19. quinti. liquam F D ratio eadem, et data [e]. At vero non fit eadem datarum A E, C F, quæ ipfarum A B, C D ratio; et fiat ut A B ad C D, ita A G ad C F. Eft autem ipfius A B ad C D ratio data. Ergo ratio magnitudinis A G ad C F
[f] ex hyp. data eft. Verum C F data eft [f]. Quare data eft A G [g].
[g] 2. dat.
[h] 4. dat. Eft autem et A E data; reliqua igitur E G data eft [h]. Quoniam vero ut A B ad C D, ita eft A G ad C F; itaque reliquæ G B ad reliquam F D ratio eft eadem, et data [e]. Sed data eft E G. Quare E B ipfâ F D major eft, datâ, quam in ratione. *Q. E. D.*

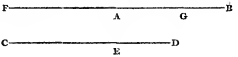
PROP.

PROP. XVI. [XVI.]

Si duæ magnitudines ad invicem habeant rationem datam; et ab unâ quidem illarum auferatur data magnitudo, alteri autem earum adjiciatur data magnitudo: tota quidem reliquâ major erit, datâ, quam in ratione.

Duæ enim magnitudines A B, C D habeant ad invicem rationem datam; et a C D quidem auferatur data magnitudo C E; magnitudini autem A B adjiciatur data magnitudo F A: dico totam F B reliquâ E D majorem eſſe, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim ratio ipſius A B ad C D data eſt; fiat huic eadem ratio ipſius A G ad C E. Ergo ratio ipſius



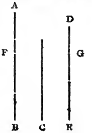
A G ad C E data eſt [i]. Data autem eſt C E: itaque A G data eſt [k]. Eſt autem et A F data. Quare tota F G data eſt [l]. Et quoniam eſt ut A B ad C D, ita A G ad C E; ratio etiam reliquæ G B ad reliquam E D eadem erit, et data [m]. Sed et data eſt G F. Ergo magnitudo F B magnitudine E D major eſt, datâ, quam in ratione [n]. Q. E. D.

[i] Def. 2. dat.
[k] 2. dat.
[l] 3. dat.
[m] 19. quinti.
[n] Def. 11. dat.

PROP. XVII. [XVII.]

Si fuerint tres magnitudines, et prima quidem ſecundâ major ſit, datâ, quam in ratione; tertia autem eâdem ſecundâ major ſit, datâ, quam in ratione: prima ad tertiam aut rationem habebit datam; aut altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Sint tres magnitudines A B, C, D E; et utraque magnitudinum A B, D E magnitudine C major ſit, datâ, quam in ratione: dico magnitudines A B, D E aut ad invicem habere rationem datam; aut alteram alterâ majorem eſſe, datâ, quam in ratione.



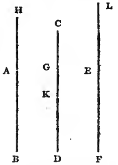
Quoniam enim magnitudo A B magnitudine C major eſt, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo A F. Ergo reliquæ F B ad C ratio eſt data.

o Def. 11. dat. data [o]. Rursus quia D E ipsâ C major est, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo D G. Ergo reliquæ G E ad C ratio est data. Ipsius vero F B ad C ratio est
p 8. dat. data: igitur ratio ipsius F B ad G E data est [p]. Adjiciuntur vero ipsis datæ magnitudines A F, D G. Igitur totæ A B, D E aut habent ad invicem rationem datam;
q 14. dat. aut altera alterâ major est, datâ, quam in ratione [q]. *Q. E. D.*

[XVIII.] PROP. XVIII.

Si fuerint tres magnitudines, atque ex his una utrâque reliquarum major sit, datâ, quam in ratione: reliquæ duæ aut datam rationem habebunt ad invicem, aut altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Sint tres magnitudines A B, C D, E F; atque ex his una, nempe C D, utrâque reliquarum A B, E F major sit, datâ, quam in ratione: dico aut magnitudinem A B ad E F rationem habere datam; aut alteram alterâ majorem esse, datâ, quam in ratione.



Quoniam enim magnitudo C D magnitudine A B major est, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo C G. Ergo reliquæ G D ad A B ratio est
r Def. 11. dat. data [r]. Fiat huic eadem ratio ipsius C G ad A H: itaque ratio ipsius C G ad A H data est. Est autem C G data. Quare A H data est. Et cum C G sit ad A H, ut G D ad B A; ergo tota C D erit
s 12. quinti. ad totam B H, ut G D ad A B [s]. Quare totius C D ad totam H B ratio est data. Rursus cum C D ipsa E F major sit, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo C K. Itaque reliquæ K D ad E F ratio est data [r]. Fiat huic eadem ratio ipsius C K ad L E. Ergo ipsius C K ad L E data est ratio. Data autem est C K. Quare L E data est. Et totius C D ad totam L F ratio est data [s]. Ipsius autem C D ad H B ratio est data. Quare et ipsius H B ad L F
t 8. dat. ratio est data [t]. Ablatæ autem sunt ab ipsis datæ magnitudines H A, L E. Quare A B, E F aut ad invicem habent rationem datam, aut altera alterâ major est, datâ,
u 15. dat. quam in ratione [u]. *Q. E. D.*

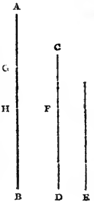
PROP.

PROP. XIX. THEOR. [XIX.]

Si fuerint tres magnitudines, et prima quidem magnitudo secundâ magnitudine major sit, datâ, quam in ratione; sit autem secunda tertiâ major, datâ, quam in ratione: prima quidem tertiâ major erit, datâ, quam in ratione.

Sint tres magnitudines A B, C D, E, et magnitudo quidem A B magnitudine C D major sit, datâ, quam in ratione; magnitudo autem C D magnitudine E major sit, datâ, quam in ratione: dico quod A B ipsâ E major est, datâ, quam in ratione.

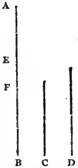
Quoniam enim C D ipsâ E major est, datâ, quam in ratione; auferatur data magnitudo C F. Ergo reliquæ F D ad E data est ratio [u]. Rursus quia A B ipsâ C D major est, datâ, quam in ratione; auferatur datâ magnitudo A G. Ergo reliquæ G B ad C D ratio est data. Fiat huic eadem ratio ipsius G H ad C F; itaque ipsius G H ad C F, necnon reliquæ H B ad reliquam F D [x], ratio est data. Ipsius autem F D ad E ratio est data. Quare ipsius H B ad E ratio est data [y]. Sed propter datam rationem ipsius G H ad C F, ipsamque C F datam; data est G H [z]. Sed et G A. Quare tota H A data [a]. Quare cum data sit ratio ipsius H B ad E, erit B A ipsâ E major, datâ, quam in ratione [u]. *Q. E. D.*



[u] Def. 11. dat.
[x] 19. quinti.
[y] 8. dat.
[z] 2. dat.
[a] 3. dat.

Aliter. Sint tres magnitudines A B, C, D, et A B quidem ipsâ C major esto, datâ, quam in ratione: sit autem et C ipsâ D major, datâ, quam in ratione: dico quod A B ipsâ D major est, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim A B ipsâ C major est, datâ, quam in ratione, auferatur data magnitudo A E, Ergo reliquæ E B ad C ratio data est [b]. Est autem magnitudo C magnitudine D major, datâ, quam in ratione [c]. Quare E B ipsâ D major est, datâ, quam in ratione [c]. Auferatur data magnitudo E F: reliquæ



[b] Def. 11. dat.
[c] ex hyp.

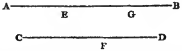
reliquæ igitur F B ad D ratio data eſt. Data autem eſt
[d] 3. dat. A F[d]: itaque A B ipſâ D major eſt, datâ, quam in ratione. *Q. E. D.*

[XX.] PROP. XX.

Si datæ fuerint duæ magnitudines, et auferantur ab ipſis magnitudines habentes ad invicem rationem datam; reliquæ magnitudines aut habebunt ad invicem rationem datam, aut altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Sint duæ datæ magnitudines A B, C D, et ab A B, C D auferantur magnitudines A E, C F habentes ad invicem rationem datam: dico quod magnitudines E B, F D aut habebunt ad invicem rationem datam; aut altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione.

Quoniam enim data eſt utraque A B, C D; ipſius
[e] 1. dat. quoque A B ad C D ratio data eſt[e]. Itaque ſi eadem ſit,



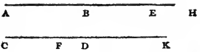
quæ ipſius A E ad C F; erit et reliquæ E B ad reliquam
[f] 19. quinti. F D ratio eadem, et data[f]. At vero non ſit eadem ablatarum A E, C F quæ datarum A B, C D ratio; et fiat ut A E ad C F, ita A G ad C D. Eſt autem ratio ipſius A E
[g] ex hyp. ad C F data[g]: itaque ratio ipſius A G ad C D data eſt. Data
[h] 2. dat. autem eſt C D: itaque data eſt A G[h]. Sed et data eſt
[i] 4. dat. A B: reliqua igitur G B data eſt[i]. Et quoniam eſt ut A E ad C F, ita A G ad C D; etiam reliquæ E G ad reliquam F D ratio eadem eſt et data[f]. Sed et data eſt G B. Quare magnitudo E B magnitudine F D major eſt, datâ,
[k] Def. 11. dat. quam in ratione[k]. *Q. E. D.*

[XXI.] * PROP. XXI. (Simſoni.)

Datis magnitudinibus duabus, ſi alteri illarum adjiciatur quædam, alteri alia quædam auferatur, addita autem ad ablatam rationem datam habeat; ſumma una cum conſequente, ad quam reliqua datam rationem habet, data erit. Necnon et reliqua una cum eâ, ad quam ſumma datam rationem habet.

Sint datæ magnitudines A B, C D. Harum alteri A B adjiciatur quædam B E; alteri C D auferatur alia quædam

C F.



C F. Dico summam A E una cum consequente, ad quam reliqua D F datam rationem habet, datam esse. Quoniam enim data est ratio C F ad B E, huic eadem fit ratio ipsius C D ad B H. Et propter datam C D, dabitur B H [l]. Data autem A B [m]. Quare tota A H data [n]. Jam vero cum C D sit ad B H, ut C F ad B E; erit et F D ad E H, ut C F ad B E [o]. Data igitur est ratio F D ad E H. Est igitur ipsa E H consequens, ad quam reliqua D F datam rationem habet. Sed A H data est, *i. e.* summa A E una cum hâc ipsâ E H.

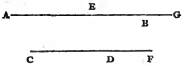
[l] 2. dat. [m] ex hyp. [n] 3. dat. [o] 19. quinti.

Dico præterea reliquam F D una cum eâ, ad quam summa A E datam rationem habet, datam esse. Capiatur enim D K, ad quam A E datam rationem habeat ipsius B E ad C F, seu E H ad F D. Tota igitur A H ad totam F K eandem datam rationem habet [p]. Sed data A H. Data igitur et F K [q]. Est autem D K consequens, ad quam summa A E datam rationem habet. Et data F K reliqua est F D una cum hâc ipsâ D K.

[p] 12. quinti. [q] 4. dat.

Datis igitur magnitudinibus duabus, &c. *Q. E. D.*

*Cor.** (Simsoni) Si duæ magnitudines, A B, C D, datam inter se rationem habeant, et alteri earum, A B, data auferatur A E, altera C D datæ C F ipsa auferatur; dico



reliquam E B una cum consequente, ad quam altera reliqua D F datam rationem habet, dari. Capiatur enim A G, ad quam data C F datam ipsius C D ad A B rationem habeat. Itaque dabitur A G [r]. Datâque etiam A E [s], dabitur E G [t]. Sed cum C F sit ad A G, ut C D ad A B, erit et F D ad B G ut C D ad A B [u]. Data igitur est ratio F D ad B G. Est igitur ipsa B G consequens, ad quam reliqua D F datam rationem habet. Sed E G data est, *i. e.* reliqua E B una cum hâc ipsâ B G.

[r] 2. dat. [s] ex hyp. [t] 4. dat. [u] 19. quinti.

C SCHOLION.

* SCHOLION.

Quæ in editis habetur Prop. xxi. fupervacanea eft, utpote a decimâ quartâ haud diverfa. Nos igitur ejus loco aliam fubrogare non dubitavimus, a Simfono defumptam, quæ converfa eft quodammodo 16æ, ficut vicefiima 15æ; quamque hic loci omnino defiderari exiftimamus.

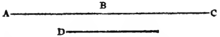
[XXII.]

PROP. XXII.

Si duæ magnitudines ad aliam aliquam magnitudinem habeant rationem utraque datam; ex duabus compofita ad eandem illam habebit rationem datam.

Duæ enim magnitudines A B, B C ad aliquam aliam magnitudinem D habeant rationem utraque datam: dico quod compofita ex duabus A C ad illam eandem D rationem habet datam.

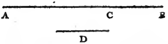
Quoniam enim utraque A B, B C ad D rationem habet
p 8. dat. datam: ratio ipfius A B ad B C data eft [p]. Quare com-



q 6. dat. ponendo ipfius A C ad C B ratio eft data [q]. Ipfius autem
r ex hyp. B C ad D data eft ratio [r]: ideoque ipfius A C ad D ratio eft data [p]. *Q. E. D.*

*Cor.** Simili modo oftendetur, fi duæ magnitudines ad tertiam aliquam utraque rationem habeant datam, differentiam quoque duarum ad eandem tertiam rationem habere datam.

Utriufque A B, B C ad tertiam D detur ratio. Dico et A C ad D rationem habere datam. Cum enim utraque A B, B C ad D datam rationem habeant, idcirco



s 8. dat. ratio A B ad B C datur [s]. Ergo convertendo ratio A B
t 5. dat. ad A C data [t]. Ratio autem A B ad D data [u]. Ratio
u ex hyp. igitur A C ad D data [s].

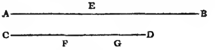
PROP.

PROP. XXIII. [XXIII.]

Si totum ad totum habeat rationem datam; habeant autem et partes ad partes rationes datas, modo non easdem: habebunt omnia ad omnia rationes datas.

Habeat enim totum A B ad totum C D rationem datam; habeant autem et partes A E, E B, ad partes C F, F D rationes datas, sed non easdem: dico etiam omnia ad omnia rationes datas habere.

Quoniam enim ipsius A E ad C F ratio data est; fiat huic eadem ratio ipsius A B ad C G: igitur ratio ipsius



A B ad C G data est. Et cum A B sit ad C G, ut ablata A E ad ablatam C F; erit et reliqua E B ad reliquam F G, ut A E ad C F [u]. Quare reliquæ E B ad reliquam F G ratio est data [x]. Data autem est ratio ipsius E B ad F D [y]. Ergo ipsius F D ad F G ratio data est [z]. Quare convertendo ipsius F D ad D G data est ratio [a]. Et quoniam ipsius B A ad utramque D C, C G data est ratio: etiam ipsius D C ad C G ratio data est [z]: unde convertendo ipsius C D ad D G ratio data est [a]. Sed ipsius G D ad F D data est ratio [b]. Quare et ipsius C D ad D F data est ratio [z]: adeoque dividendo et ipsius C F ad D F ratio data est [a]. Sed ipsius C F quidem ad A E data est ratio, atque ipsius F D ad B E ratio data est [y]. Quamobrem et omnium ad omnia rationes datæ sunt. *Q. E. D.*

[u] 19. quinti.
[x] Def. 2. dat.
[y] ex hyp.
[z] 8. dat.
[a] 5. dat.
[b] Ex hactenus ostensis.

PROP. XXIV. [XXIV.]

Si tres rectæ lineæ proportionales fuerint; prima autem ad tertiam habeat rationem datam: ea etiam ad secundam datam rationem habebit.

Sint tres rectæ lineæ proportionales A, B, C, sitque ut A ad B, ita B ad C; habeat autem A ad C rationem datam: dico ipsam quoque ad B rationem datam habere.

Exponatur enim recta data D. Et quoniam ratio ipsius A ad C data est; fiat huic eadem ratio ipsius D ad F: igitur ratio D ad F data est. Est autem D data. Ergo etiam F data est [c]. Sumatur autem inter duas rectas D, F media proportionalis E [d]: igitur quod continetur

[c] 2. dat.
[d] 13. sexti.

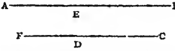
[e] 17. ſexti. continetur ſub D, F æquale eſt quadrato rectæ B [e]: id autem, quod continetur ſub D, F, datum eſt; quia data eſt utraque rectarum D, F. Quare quadratum rectæ E datum [f] Def. 1. dat. eſt [f]. Ergo data eſt recta E. Eſt autem D data. Quare ipſius D ad E ratio data [g] 1. dat. eſt [g]. Quoniam vero eſt ut A ad C, ita [h] ex hyp. D ad F [h]. Sed ut A quidem ad C, ita quadratum rectæ A ad id, quod continetur [i] 1. ſexti. ſub rectis A, C [i]; ut vero D ad F, ita quadratum rectæ D ad id, quod continetur ſub rectis D, F. Erit ergo ut quadratum rectæ A ad id, quod continetur ſub rectis A, C, ita quadratum rectæ D ad id, quod continetur ſub rectis D, F. Sed id, quod continetur quidem ſub rectis A, C, æquale eſt quadrato rectæ B [e]; quia proportionales ſunt A, B, C [h]; ei autem, quod continetur ſub D, F, æquale eſt quadratum rectæ E. Quare ut quadratum rectæ A ad quadratum rectæ B, ita eſt quadratum rectæ D ad quadratum rectæ E. Ergo ut A ad [k] 22. ſexti. B, ita eſt D ad E [k]. Eſt autem ratio ipſius D ad E data [l]. [l] Prius oſtenſa. Quare et ratio ipſius A ad B data eſt. *Q. E. D.*



* SCHOLION.

Quæ hactenus in hoc Libro tradita ſunt, ad rationum Analyticam pertinentia, paucis, quæ ab auctore prætermiſſa ſunt, ſupplere viſum eſt: ne quæ uſûs ſunt fere quotidiani in problematum reſolutione, utut peritioribus manifeſta ſint, ab aliis deſiderentur. Sunt autem quæ ſequuntur.

* PROP. I. Si antecedens conſequente major ſit, datâ, quam in ratione; invertendo, conſequens antecedente minor erit, datâ, quam in ratione. E contrario, ſi antecedens conſequente minor ſit, datâ, quam in ratione; invertendo, conſequens antecedente major erit, datâ, quam in ratione.



Antecedens A B conſequente C D major ſit, datâ A E, quam in ratione. Ablatâ igitur A E, reliqua E B ad C D datam

datam habet rationem[m]. Eadem sit ratio datæ A E ad F D. Itaque F D data[n]. Sed cum A E sit ad F D, ut E B ad D C; erit tota A B ad totam F C, ut A E ad F D[o]; *i. e.* in ratione datâ. Ergo invertendo, ratio F C ad A B data. Sed F D data. Quare duarum A B, D C consequens D C antecedente A B minor est, datâ F D, quam in ratione[p]. *Q. E. D.*

m Def. 11. dat.
n 2. dat.
o 12. quinti.
p Def. 12. dat.

Jam vero antecedens A B consequente C D minor sit, datâ A E, quam in ratione. Additâ igitur A E, tota E B ad C D rationem habet datam[m]. Eadem sit ratio datæ



A E ad D F. Itaque D F data[n]. Sed cum E B sit ad C D, ut ablata E A ad ablatam D F, erit et reliqua A B ad reliquam F C, ut E B ad D C[q]; id est, in ratione datâ. Invertendo igitur ratio C F ad A B data. Data autem D F. Duarum igitur A B, C D consequens C D antecedente A B major est, datâ F D, quam in ratione[m]. *Q. E. D.*

q 19. quinti.

* PROP. 2. Si antecedens cum aliâ quâdam, ad quam consequens datam rationem habet, detur; invertendo dabitur consequens cum aliâ quâdam, ad quam antecedens datam rationem habet.

Antecedenti A B adjiciatur alia B E, ad quam consequens C D datam rationem habeat, et detur tota A E. Propter

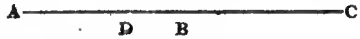


rationem C D ad B E datam; invertendo, dabitur ratio B E ad D C. Eadem sit ratio datæ A E ad C F. Itaque data erit C F[n]. Sed cum A E sit ad C F, ut B E ad D C, erit et A B ad D F, ut B E ad D C[q]; id est, in ratione datâ. Est igitur D F ea, ad quam antecedens A B datam rationem habet. Et C F, id est, consequens cum D F, datur. *Q. E. D.*

* Prop. 3. Si duarum magnitudinum inæqualium (A B, A C) minor (A B) majore (A C) major ſit, datâ (B D), quam in ratione; duarum differentia (B C) majore (A C) minor erit, eâdem datâ (B D), quam in ratione.

Ablatâ enim datâ B D, reliqua A D ad A C datam rationem habet [a]. Invertendo ratio A C ad A D data.

[a] Def. 11. dat.

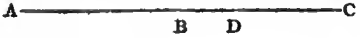


Convertendo igitur, atque iterum invertendo, ratio C D ad C A data. Igitur C B adjunctâ datâ B D ad A C datam rationem habet. Quare C B majore A C datâ B D minor, quam in ratione. *Q. E. D.*

* Prop. 4. Si duarum magnitudinum inæqualium (A B, A C) minor (A B) majore (A C) minor ſit, datâ (B D) quam in ratione; duarum differentia (B C) vel ipſa data erit, vel major erit majore (A C), eâdem datâ B D, quam in ratione, vel cum aliâ quâdam, ad quam major A C datam rationem habet, data erit.

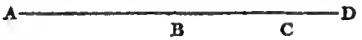
Minori enim A B datâ B D additâ, A D ad A C datam rationem habet [a]. Data autem B D vel æqualis erit,

[a] Def. 12. dat.



vel minor, vel major quam B C duarum A B, A C differentia. Primum ſi æqualis, erit ipſa B C data. At ſi B D minor ſit quam B C; propter datam rationem ipſius A D ad A C, invertendo ratio A C ad A D data. Convertendo igitur atque iterum invertendo, ratio C D ad C A data. Data autem D B. Quare B C ipſâ A C major, datâ B D, quam in ratione.

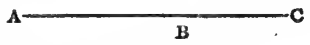
Sit denique B D illâ B C major. Propter rationem ipſius A D ad A C datam, convertendo ratio A D ad D C



data. Quare dividendo ratio A C ad C D data. Sed duarum A B, A C differentia B C cum illâ C D eſt ipſa data B D. *Q. E. D.*

* Prop. 5. Si duarum magnitudinum inæqualium (A B, A C) major (A C) minore (A B) major ſit, datâ, quam

quam in ratione; differentia duarum B C, vel ipsa data erit, vel majore A C major erit, datâ, quam in ratione, vel denique cum aliâ, ad quam major A C datam rationem habet, data erit.



Quod si major inæqualium (A C) minore (A B) minor sit, datâ, quam in ratione; differentia inæqualium (B C) majore A C minor erit, datâ, quam in ratione.

Nam primum si A C minore A B major sit, datâ, quam in ratione; erit A B ipsâ A C minor, datâ, quam in ratione[t]. Quare B C vel data erit, vel ipsâ A C major erit, datâ, quam in ratione, vel denique cum aliâ, ad quam A C datam rationem habet, data erit[u]. [t] 1.* hujus scholii. [u] 4.* hujus scholii.

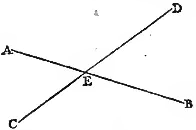
Quod si major A C minore A B minor sit, datâ, quam in ratione, erit A B ipsâ A C major, datâ, quam in ratione[t]. Quare inæqualium differentia B C, majore A C minor erit, datâ, quam in ratione[x]. [x] 3.* hujus scholii.

Quinque harum propositionum, primam et secundam Simsonus in suis Datis habet, sed longe aliter enunciatas. *Q. E. D.*

PROP. XXV. [XXV.]

Si duæ quævis lineæ positione datæ sibi mutuo occurrant; punctum etiam mutui occursûs datum est.

Duæ enim lineæ positione datæ A B, C D sibi mutuo occurrant in puncto E: dico datum esse punctum E.



Si non, excidet punctum E: igitur alterius e rectis A B, C D positio excidet. Atqui non excidit[y]. Ergo punctum E datum est. *Q. E. D.* [y] ex hyp.

[XXVI.] PROP. XXVI.

Si rectæ lineæ extrema positione data sint; recta positione et magnitudine data est.

Rectæ enim lineæ A B extrema A, B data sint positione: dico rectam A B positione et magnitudine datam esse.



Si enim, manente puncto A, excidat positio aut magnitudo rectæ A B; excidet et punctum B. Atqui non excidit [q]. Ergo recta A B positione et magnitudine data est. *Q. E. D.*

[q] ex hyp.

[XXVII.] PROP. XXVII.

Si rectæ lineæ, positione et magnitudine datæ, datum fuerit unum extremum; alterum quoque datum erit.

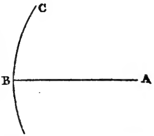
Rectæ enim lineæ A B, positione et magnitudine datæ, datum sit unum extremum A: dico et extremum B datum esse.



Si enim, manente puncto A, punctum B excidat; excidit quoque rectæ A B aut positio aut magnitudo. Atqui neutra excidit [r]. Quare punctum B datum est. *Q. E. D.*

[r] ex hyp.

Aliter. Centro A, intervallo A B, describatur circumferentia C B: circumferentia igitur C B positione data est [s]. Recta autem A B positione data est [r]. Ergo punctum B datum est [t]. *Q. E. D.*



[s] Def. 6. dat.

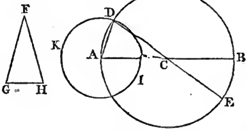
[t] 25. dat.

[XXIX.] PROP. XXVIII.

Si ad rectam positione datam, ad datum in eâ punctum, agatur recta, quæ datum cum datâ faciat angulum; acta etiam recta positione data est.

Ad rectam A B positione datam, ad datum in eâ punctum C, agatur recta D C E, quæ angulum D C A cum

C A



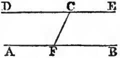
C A datum faciat. Dico rectam D C E positione datam.
Propter angulum D C A datum, inveniri potest ejus æ-
qualis [t]. Dantur igitur positione duæ quædam lineæ [t] Def. 1.
rectæ, quæ angulum æqualem continent. (Nam ut ra- dat.
tio non aliter inveniatur quam magnitudines inveniendo,
quarum ratio est; sic angulus non aliter invenitur quam
lineas inveniendo, sive positiones linearum, quæ angu-
lum æqualem continent.) Sint istiusmodi rectæ F G,
F H. In rectâ A B positione datâ sumatur punctum A.
Centro C, intervallo C A, describatur circulus A D B, qui
rectæ D C E in puncto D occurrat. Jungatur A D, cen-
troque A, intervallo A D, describatur circulus I D K.
Sumantur F G, F H rectæ A C singulatim æquales, et
jungatur G H. Propter puncta C, A data, recta C A
magnitudine data est [u]. Datæ sunt igitur F G, F H mag- [u] 26. dat.
nitudine. Sed et positione [x]. Punctum igitur F datum [y], [x] ex hyp.
datarum utique interfectio. Data sunt igitur puncta [y] 25. dat.
G, H [z]. Recta igitur G H magnitudine et positione [z] 27. dat.
data. Sed propter rectas F G, F H rectis C A, C D sin-
gulas singulis æquales, angulumque G F H angulo
A C D æqualem [x]; æquales erunt G H, A D [a]. Sed ostensa [a] 4. primi.
est G H magnitudine data. Quare et ejus æqualis A D
data. Punctum autem A datum. Peripheria igitur
I D K positione data [b]. Sed data etiam positione peri- [b] Def. 6.
pheria A D B, dato centro C, datoque intervallo C A de- dat.
scripta. Datarum igitur peripheriarum interfectio, pun-
ctum D datum [c]. Datumque est punctum C [x]. Recta [c] 25. dat.
igitur D C E, quæ per duo data puncta transit, positione
data est [u]. *Q. E. D.*

PROP.

[XXVIII.] PROP. XXIX.

Si per datum punctum contra rectam positione datam agatur recta linea; acta recta positione data est.

Detur positione recta A B, cui per punctum datum C parallela agatur D C E. Dico rectam D E positione datam. In rectâ A B sumatur punctum F. Jungatur C F. Propter puncta C, F data; recta C F magnitudine et positione data est[c]. Sed recta F B positione data[d]. Angulus igitur C F B datus, qui rectis continetur positione datis. Sed propter parallelas A B, D E, angulus D C F angulo C F B æqualis[e]. Angulus igitur D C F datus. Recta igitur C D, a dato puncto C in rectâ C F positione datâ in dato angulo educta, positione data est[f]. *Q. E. D.*



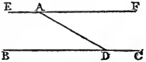
c 26. dat.
d ex hyp.
e 29. primi.
f Per præcedentem.

[XXX.] PROP. XXX.

Si a dato puncto in datam positione rectam agatur recta linea, quæ faciat angulum datum; acta recta positione data est.

A dato enim puncto A in positione datam rectam B C agatur recta linea A D, quæ faciat angulum datum A D B. Dico positione datam esse rectam A D.

Agatur per punctum A rectæ B D C parallela E A F[g]. Quoniam igitur per datum punctum A contra datam positione rectam B D C acta est recta linea E A F: positione datur recta E A F[h]. Quoniam vero rectæ B D C, E A F sunt parallelæ; atque in illas incidit recta D A: angulus igitur F A D angulo A D B æqualis est[i]. Datus autem est A D B[k]: quare et angulus F A D datus est. Quoniam itaque ad positione datam rectam lineam E A F, et datum in eâ punctum A, acta est recta linea, quæ facit angulum F A D datum: recta igitur A D positione data est[l]. *Q.E.D.*



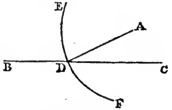
g 31. primi.
h 28. dat.
i 29. primi.
k ex hyp.
l 29. dat.

[XXXI.] PROP. XXXI.

Si a dato puncto in datam positione rectam data magnitudine recta producatur; ea etiam positione data est.

A dato enim puncto A agatur in positione datam rectam B C data magnitudine recta A D: dico eam etiam positione datam esse.

Centro



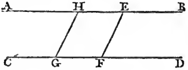
Centro enim A, intervallo autem A D, circulus E D F describatur. Itaque positione datus est circulus E D F[l]: [l] Def. 6. dat.
nam ejus centrum positione datum est, et quæ ex centro,
ipsa A D, magnitudine. Sed et recta B C est etiam positione data. At vero si duæ lineæ positione datæ se invicem secent; punctum interfectionis datum est[m]: [m] 25. dat.
ergo datum est punctum D. Est autem punctum A datum: quare A D positione data est[n]. Q. E. D. [n] 26. dat.

PROP. XXXII. [XXXII.]

Si in rectas parallelas positione datas agatur recta linea, quæ faciat angulos datos; acta recta magnitudine data est.

In rectas enim parallelas positione datas A B, C D agatur recta linea E F, faciens angulos B E F, E F D datos: dico magnitudine datam esse rectam E F.

Sumatur enim in C D datum punctum G, et per G agatur ipsi E F parallela G H[o]. Et quoniam parallela est G H [o] 31. primi.



ipsi E F, et in illas incidit C D; erit angulus E F D angulo H G D æqualis[p]. Angulus autem E F D datus est[q]: quare et [p] 29. primi.
angulus H G D datus est. Quoniam itaque ad positione da- [q] ex hyp.
tam rectam C D, et datum in ea punctum G, acta est recta
G H, quæ facit angulum H G F datum: positione data [r] 29. dat.
erit recta G H[r]. Est autem A B positione data[q]: itaque [s] 25. dat.
punctum H datum est[s]. Est autem punctum G datum[t]; [t] Per constr.
quare G H magnitudine data est[u]. Atqui est æqualis ipsi [u] 26. dat.
E F[x]: ergo etiam E F magnitudine data est[y]. Q. E. D. [x] 34. primi. [y] Def. 1. dat.

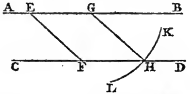
PROP.

[XXXIII.] PROP. XXXIII.

Si in rectas parallelas positione datas agatur recta magnitudine data; faciet ea angulos datos.

In rectas enim parallelas positione datas A B, C D agatur recta E F magnitudine data: dico quod ipsa faciet angulos A E F, E F C datos.

Accipiatur enim in rectâ A B datum punctum G, et [a] 31. primi. per punctum G agatur ipsi E F parallela G H [a]: æqualis

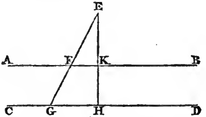


[a] 34. primi. igitur est F E ipsi G H [a]. Est autem E F magnitudine [b] ex hyp. data [b]: ergo G H magnitudine data est. Et datum est [c] 31. dat. punctum G: quare recta G H positione data est [c]. Positione autem data est recta C D [b]: itaque angulus G H C [d] 29. primi. datus est. Et est G H C ipsi E F C æqualis [d]: igitur an- [e] 32. primi, et 4. dat. gulus E F C datus est: igitur et reliquus A E F datus est [e]. *Q. E. D.*

[XXXIV.] PROP. XXXIV.

Si in rectas parallelas positione datas a dato puncto recta linea agatur; secabitur illa in datâ ratione.

In rectas enim parallelas positione datas A B, C D a dato puncto E agatur linea E F G: dico ipsius E F ad F G rationem datam esse.



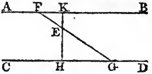
Agatur enim a puncto E in rectam C D perpendicu- [f] 12. primi. laris E K H [f]. Et quoniam a dato puncto E ad positione datam rectam C D recta E H acta est, quæ facit angulum

E H G

E H G datum; positione data erit E H [f]. Est autem utraque rectarum A B, C D positione data [g]: itaque utrumque punctorum K, H datum est [h]. Sed et punctum E datum est: quare utraque rectarum E K, K H data est [i]: igitur ratio ipsius E K ad K H data est [k]. Sed est E K ad K H, ut E F ad F G [l]. Ergo ratio ipsius E F ad F G data est [m]. *Q. E. D.* [f] 30. dat. [g] ex hyp. [h] 25. dat. [i] 26. dat. [k] 1. dat. [l] 2. sexti. [m] Def. 2. dat.

† Aliter. In rectas parallelas positione datas A B, C D per datum punctum E agatur recta linea F E G: dico ipsius G E ad E F rationem datam esse.

Agatur enim a puncto E in rectam C D perpendicularis E H [n], et producatur ad punctum K. Quoniam igitur a puncto dato E ad positione datam rectam C D acta est E H, quæ facit angulum E H G datum; data erit positione ipsa E H [o]. Est autem utraque rectarum A B, C D positione data [p]: quare utrumque punctorum K, H datum est [q]. Datum autem est punctum E [p]: ergo utraque rectarum H E, E K data est [r]: ideoque ipsius H E ad E K ratio est data [s]. Verum ut H E ad E K, ita G E ad E F [t]. Itaque ratio ipsius G E ad E F data est [u]. *Q. E. D.* [n] 12. primi. [o] 30. dat. [p] ex hyp. [q] 25. dat. [r] 26. dat. [s] 1. dat. [t] 4. sexti. [u] Def. 2. dat.



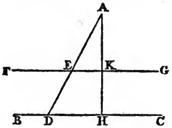
PROP. XXXV. [XXXV.]

Si a dato puncto in datam positione rectam ducatur recta linea, seceturque in datâ ratione, per punctum vero sectionis contra datam positione rectam agatur recta linea; acta recta positione data est.

A dato enim puncto A in positione datam rectam B C agatur recta linea A D, et secetur in puncto E in datâ ratione; scilicet ut ipsius D E ad E A ratio detur; et agatur per punctum E ipsi B C parallela F E G: dico positione datam esse F E G.

Duceatur enim a puncto A ad rectam B C perpendicularis A H. Quoniam ergo a dato puncto A in datam positione rectam B C acta est recta linea A H, quæ facit angulum A H D datum: positione data erit ipsa A H [x]. Est autem B C positione data [y]. Itaque datum est punctum H [z]. At vero punctum A datum est [y]: ergo recta [x] 30. dat. [y] ex hyp. [z] 25. dat.

† *Est verius casus alter quam alia demonstratio.*



a 26. dat. b 2. sexti. c ex hyp. d Def. 2. dat. e 6. dat. f 2. dat. g 27. dat. h 28. dat.

A H positione et magnitudine data est [a]. Quoniam vero est ut D E ad E A, ita H K ad K A [b]; atque data est ratio ipsius D E ad E A [c]: igitur ratio ipsius H K ad K A data est [d]: ideoque componendo ipsius A H ad A K data est ratio [e]. Data autem est A H magnitudine: quare A K magnitudine data est [f]. Sed positione quoque data est A K; atque datum est punctum A [c]: itaque datum est punctum K [g]. Quoniam igitur per datum punctum K, contra datam positione rectam B C, recta linea F G acta est. Igitur recta F G positione data erit [h]. *Q. E. D.*

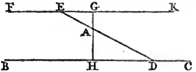
[XXXVI.]

PROP. XXXVI.

Si a dato puncto in datam positione rectam lineam ducatur recta linea, atque adjiciatur ipsi aliqua recta, quæ ad illam habeat rationem datam; per extremum vero adjectæ lineæ contra datam positione rectam linea recta agatur: acta recta positione data est.

A dato enim puncto A ad positione datam rectam B C ducatur recta A D: atque adjiciatur ipsi A D recta A E, quæ ad A D rationem datam habeat; per punctum vero E ipsi B C agatur parallela F K: dico F K esse positione datam.

Agatur enim a puncto A ad B C perpendicularis A H, et producatur ad punctum G. Quoniam igitur a dato



puncto A ad datam positione rectam B C acta est recta linea A H, quæ facit angulum A H C datum; H A G positione

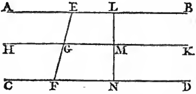
ſitione data eſt [i]. Eſt autem B C poſitione data [k]: quare [i] 30. dat.
datum eſt punctum H [l]. Sed et punctum A datum eſt [k]: [k] ex hyp. [l] 25. dat.
itaque data eſt recta A H [m]. Et quoniam ratio ipſius [m] 26. dat.
A E ad A D data eſt [k], et eſt ut A G ad A H, ita E A ad [n] 4. ſexti.
D A [n]; ratio ipſius A G ad A H data erit [o]. Data autem [o] Def. 2. dat.
eſt A H: quare et A G magnitudine data eſt [p]. Sed et
etiam poſitione data eſt A G; atque datum eſt punctum [p] 2. dat.
A: ergo punctum G datum eſt [q]. Quoniam itaque per [q] 27. dat.
datum punctum G contra datam poſitione rectam B C
acta eſt recta linea F G K: ipſa F G K poſitione data eſt [r]. [r] 28. dat.
Q. E. D.

PROP. XXXVII. [XXXVII.]

Si in rectas parallelas poſitione datas ducatur recta linea, ſeceturque in ratione datâ; per ſectionis autem punctum contra datas poſitione rectas agatur linea recta: acta recta poſitione data eſt.

In rectas enim parallelas poſitione datas A B, C D agatur recta linea E F, et ſecetur in datâ ratione in puncto G; ſcilicet ut ipſius F G ad G E ratio detur; et ducatur per punctum G utrilibet rectarum A B, C D parallela H K: dico poſitione datam eſſe H K.

Sumatur enim in rectâ A B datum punctum L, et deducatur a puncto A in rectam C D perpendicularis L N.



Quoniam itaque a dato puncto L ad datam poſitione
rectam C D acta eſt recta linea L N, quæ facit angulum
datum L N D: ipſa L N poſitione data eſt [s]. Eſt autem [s] 30. dat.
C D poſitione data [t]: ergo datum eſt punctum N [u]. Sed [t] ex hyp.
et datum eſt punctum L: quare data eſt recta L N [u] 25. dat.
magnitudine [x]. Quoniam vero ratio ipſius F G ad G E [x] 26. dat.
data eſt [y], atque eſt ut F G ad G E, ita N M ad M L [z]: [y] ex hyp.
ratio quoque ipſius N M ad M L data eſt [a]. Ideoque [z] 2. ſexti. [a] Def. 2.
ratio ipſius N L ad L M eſt data [b]. Eſt autem N L dat.
magnitudine data: quare data eſt L M magnitudine [c]. [b] 6. dat.
Sed [c] 2. dat.

Sed et positione data est; et datum est punctum L:
[d] 26. dat. quare et punctum M datum est [d]. Quoniam itaque per datum punctum M contra positione datam rectam C D acta est recta linea H K; ipsa H K positione data est [e].
[e] 28. dat. *Q. E. D.*

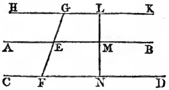
[XXXVIII.]

PROP. XXXVIII.

Si in rectas parallelas positione datas ducatur recta linea, adjiciaturque ei quædam recta habens ad ipsam rationem datam; per extremum vero adjectæ contra datas positione parallelas recta linea agatur: acta recta positione data est.

In rectas enim parallelas positione datas A B, C D agatur recta linea E F, et adjiciatur ipsi quæpiam recta E G, quæ ad E F habeat rationem datam: per punctum autem G utrilibet rectarum A B, C D agatur parallela recta linea H K: dico quod H K positione data est.

Sumatur enim in rectâ A B datum punctum M, et ducatur a puncto M in lineam C D perpendicularis recta
[f] 12. primi. M N [f], et producatur ad punctum L. Quoniam igitur a dato puncto M, in positione datam rectam C D, acta



[g] 29. dat. est recta linea M N, quæ facit angulum M N D datum: recta M N positione data est [g]. Sed et C D positione data
[h] ex hyp. est [h]: ergo datum est punctum N [i]. Est autem et pun-
[i] 25. dat. ctum M datum: quare data est M N magnitudine [k].
[k] 26. dat. Quoniam vero ratio F E ad E G data est [h]; atque est ut
[l] 2. sexti. F E ad E G, ita N M ad M L [l]: ratio quoque N M ad
[m] Def. 2. dat. M L data est [m]. Data autem est M N magnitudine:
[n] 2. dat. quare et M L magnitudine data est [n]. Sed et positione data est M L, atque etiam datum est punctum M: ergo et punctum L datum est [k]. Quoniam igitur per datum punctum L contra datam positione rectam A B acta est recta linea H K [h]: ipsa H K positione data erit [g]. *Q. E. D.*

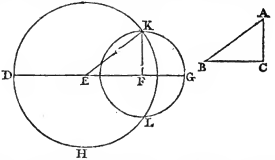
PROP.

PROP. XXXIX. [XXXIX.]

Si trianguli ſingula latera magnitudine data ſint; triangulum ſpecie datum eſt.

Trianguli enim A B C ſingula latera magnitudine data ſint: dico triangulum A B C ſpecie datum eſſe.

Exponatur enim recta poſitione data D G, finita quidem ad punctum D, infinita vero verſus alteram partem; in eâ autem ponatur ipſi A B æqualis D E [o]. Eſt autem [o] A B data; ergo data eſt D E. Sed et D E poſitione data [o] 3. primi.



eſt [p]; atque datum eſt punctum D: igitur punctum E [q] datum eſt [q]. Ponatur vero ipſi B C æqualis E F. Eſt [q] autem B C data; ergo data eſt E F. Sed et E F poſitione data eſt; atque datum eſt punctum E: quare punctum F datum eſt. Rurſus, ponatur ipſi A C æqualis F G. Eſt autem A C data: ergo et F G data eſt. Sed et poſitione data eſt F G; atque datum eſt punctum F: quare et punctum G datum eſt. Dein centro quidem E, intervallo autem E D, circulus deſcribatur D K H: itaque poſitione datus eſt circulus D K H [r]. Rurſus, centro quidem F, intervallo autem F G, circulus deſcribatur G K L: itaque poſitione datus eſt circulus G K L: quare punctum K datum eſt [s]. Eſt autem utrumque punctorum E, F [s] datum: ergo unaquæque linearum K E, E F, F K poſitione et magnitudine data eſt. Sed propter rectas E K, E F, F K poſitione datas, dati ſunt trianguli E F K anguli ſinguli, ſingulis trianguli A B C angulis æquales [t]. Dati [t] ſunt igitur anguli ſinguli in triangulo A B C. Laterum vero magnitudines ſingulatim datæ ſunt [p], ac mutuæ proinde rationes [u]. Triangulum igitur A B C ſpecie [u] datum eſt [x]. *Q. E. D.*

[p] ex hyp.
[q] 27. dat.
[r] Def. 6. dat.
[s] 25. dat.
[t] 8. primi.
[u] 1. dat.
[x] Def. 3. dat.

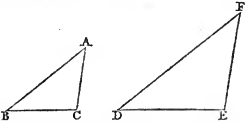
[XL.] PROP. XL.

Si trianguli singuli anguli magnitudine dati sint; triangulum ipsum specie datum est.

Trianguli enim A B C unusquisque angulorum magnitudine datus sit: dico triangulum ABC specie datum esse.

Exponatur enim positione et magnitudine data recta D E, et ad rectam D E, et ad puncta D, E in ipsa, angulo quidem A B C æqualis constituatur angulus rectilineus F D E; angulo autem A C B æqualis F E D[x]: itaque reliquus angulus B A C reliquo D F E æqualis est[y]. Triangulum igitur D F E, triangulo B A C simile est[z].

[x] 23 primi. [y] 32. primi. [z] 4. sexti.



Unusquisque autem eorum, qui ad A, B, C puncta sunt, angulorum datus est: quare et unusquisque angulorum ad F, D, E datus erit. Quoniam itaque ad positione datam rectam lineam D E, et ad datum in eâ punctum D acta est recta linea D F, faciens angulum datum ad punctum D, ipsa D F positione data erit[a]. Similiter quoque positione data est et E F: quare punctum F datum est[b]. Datum autem est utrumque punctorum D, E: unaquæque igitur linearum D E, D F, E F positione et magnitudine data est[c]: itaque triangulum DFE specie datum est[d]; atqui simile est triangulo ABC[z]. Triangulum igitur A B C specie datum est. *Q. E. D.*

[a] 29. dat. [b] 25. dat. [c] 26. dat. [d] 39. dat.

[XLI.] PROP. XLI.

Si triangulum unum angulum datum habeat, circa datum autem angulum duo latera ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipsum specie datum est.

Vide fig. Prop. 40.

Habeat enim triangulum A B C unum angulum datum, nempe B A C; circa datum autem angulum B A C latera B A, A C ad invicem rationem datam habeant: dico triangulum A B C specie datum esse.

Expo-

Exponatur enim positione et magnitudine data recta D F, et constituatur ad rectam D F, et datum in eâ punctum F, angulo B A C æqualis angulus D F E[f]. Est autem angulus BAC datus: quare et angulus D F E datus est. Quoniam igitur ad positione datam rectam D F, et datum in eâ punctum F, acta est recta linea F E, faciens angulum D F E datum; positione data erit recta F E[g]. Quoniam ergo ratio ipsius B A ad A C data est[h]; fiat huic eadem ratio ipsius D F ad F E; et connectatur D E: itaque ratio D F ad F E data est[i]. Data autem est D F: igitur data est F E[k]. Sed et ipsa etiam positione data est; et datum est punctum F: itaque datum est punctum E[l]. Est autem utrumque punctorum D, F datum: quare data est unaquæque linearum D F, F E, D E positione et magnitudine[m]: itaque triangulum D F E specie datum est[n]. Quoniam vero duo triangula A B C, D E F unum angulum uni angulo æqualem habent, scilicet angulum B A C angulo D F E, circa æquales autem angulos B A C, D F E latera proportionalia; triangulum A B C triangulo D E F simile erit[o]. Triangulum autem D E F specie datum est. Triangulum igitur A B C specie etiam datum est. *Q. E. D.*

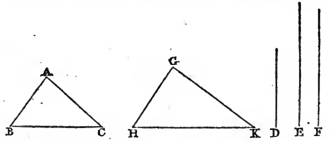
f 23. primi.
g 29. dat.
h ex hyp.
i Def. 2. dat.
k 2. dat.
l 27. dat.
m 26. dat.
n 39. dat.
o 6. sexti.

PROP. XLII. [XLII.]

Si trianguli latera ad invicem habeant rationem datam, triangulum specie datum est.

Trianguli enim A B C latera ad invicem habeant rationem datam: dico triangulum A B C specie datum esse.

Exponatur enim data magnitudine recta D. Quoniam vero ratio ipsius A B ad B C data est; fiat huic eadem



ratio ipsius D ad E. Data autem est D: quare et data est E[p]. Rursus quoniam ratio ipsius B C ad A C data est;

p 2. dat.

eſt; ſiat huic eadem ratio ipſius E ad F. Eſt autem E
[q] 22. primi. data: itaque F data eſt. Deinde ex tribus rectis[q], quæ æquales ſint tribus datis rectis D, E, F, quarum utique duæ reliquâ majores ſunt, utcunque ſumptæ †, conſtituatur triangulum G H K; ita ut æqualis ſit recta G H ipſi D, recta autem H K ipſi E, et G K ipſi F. Eſt autem unaquæque linearum D, E, F data; quare data eſt unaquæque linearum G H, H K, K G magnitudine: triangulum igitur
[r] 39. dat. G H K ſpecie datum eſt[r]. Quoniam autem eſt ut A B ad B C, ita D ad E, atque ipſi D æqualis eſt recta G H, ipſi vero E recta H K; erit quoque ut A B ad B C, ita G H ad
[s] 11. quinti. H K[s]. Rurſus, quoniam eſt ut B C ad C A, ita E ad F, atque ipſi E æqualis eſt H K, et ipſi F æqualis K G; erit etiam ut B C ad C A, ita H K ad K G. Oſtenſum autem eſt ut A B, ad B C, ita eſſe G H ad H K. Eſt igitur ex æquo
[t] 22. quinti. ut A B ad A C, ita G H ad G K[t]. Itaque triangulum
[u] 5. ſexti. A B C triangulo G H K ſimile eſt[u]. Verum triangulum G H K ſpecie datum eſt: quare et triangulum A B C ſpecie datum eſt. *Q. E. D.*

[XLIII.] PROP. XLIII.

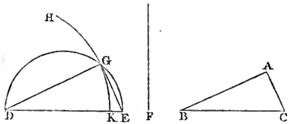
Si trianguli rectanguli latera circa unum acutorum angulorum, ad invicem habeant rationem datam; triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

Trianguli enim rectanguli A B C, rectum habentis angulum B A C, latera C B, B A circa unum acutorum angulorum C B A, habeant rationem datam: dico triangulum A B C ſpecie datum eſſe.

Exponatur enim poſitione et magnitudine data recta D E; ſuper D E vero deſcribatur ſemicirculus D G E. Et quoniam ratio ipſius C B ad B A data eſt; ſiat huic eadem ratio ipſius D E ad F: quare ratio ipſius D E ad
[x] 2. dat. F data eſt. Data autem eſt D E: ergo F data eſt[x]. Et
[y] 19. primi. major eſt C B ipſâ B A[y]: quare et major eſt E D ipſâ F. In
[z] 1. quarti. circulo aptetur ipſi F æqualis D G[z], et connectatur G E; dein centro quidem D, intervallo autem D G, circulus deſcribatur H G K: itaque poſitione datus eſt ſemicir-
[a] Def. 6. dat. culus H G K[a]; ipſius namque centrum datum eſt, et ea

† *Nam cum* D *ſit ad* E, *ut* A B *ad* B C; *componendo, duæ* D, E *ſimul ad* E, *ut duæ* A B, B C *ſimul ad* B C. *Sed* E *eſt ad* F, *ut* B C *ad* C A. *Ex æquo igitur duæ* D, E *ſimul ad* F, *ut duæ* A B, B C *ſimul ad* C A. *Duæ autem* A B, B C
[b] 20. primi. *ſimul majores ſunt quam* C A[b]. *Duæ igitur* D, E *ſimul majores quam* F. *Simili modo aliæ quælibet duæ ex tribus* D, E, F *oſtendentur reliquâ majores.*

quæ



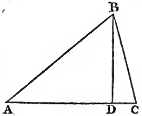
quæ ex centro eſt magnitudine. Sed et ſemicirculus D G E poſitione datus eſt: ergo punctum G datum eſt[c]. [c] 25. dat.
Datum eſt autem utrumque punctorum D, E: igitur unaquæque linearum G D, E G, E D poſitione et magnitudine data eſt[d]: quare triangulum G D E ſpecie datum [d] 26. dat.
eſt[e]. Quoniam itaque triangula A B C, D E G unum an- [e] 39. dat.
gulum uni angulo æqualem habent, angulum ſcilicet B A C angulo D G E, circa alios autem angulos C B A, E D G latera proportionalia, reliquorum autem B C A, D E G ſimul utrumque recto minorem[f]; triangulum A B C [f] ex hyp.
ipſi D E G ſimile erit[g]. Triangulum autem D E G ſpecie [g] 7. ſexti.
datum eſt[h]. Quare triangulum quoque A B C ſpecie da- [h] ex oſtenſis.
tum eſt. *Q. E. D.*

PROP. XLIV. [XLV.]

Si triangulum angulum unum habeat datum; latera autem circa alium angulum habeant ad invicem rationem datam: triangulum ſpecie datum eſt.

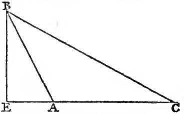
Sit triangulum A B C, quod unum angulum habeat datum, qui ſit B A C; circa alium autem angulum A B C latera A B, B C habeant rationem datam: dico triangulum A B C ſpecie datum eſſe.

Si angulus B A C rectus ſit, oſtenſum in præcedente. Sed angulus B A C non ſit rectus; et primum ſit acutus: et agatur a puncto B in lineam A C perpendicularis B D. Quoniam vero datus eſt angulus B D A, eſtque angulus B A D datus[i]; ergo et reliquus [i] ex hyp.
A B D datus eſt[k]: itaque tri- [k] 32. primi, et 4. dat.
angulum B A D ſpecie datum
eſt[l]: quare ratio ipſius B A [l] 40. dat.
ad B D data eſt[m]. Sed rectæ A B ad B C data eſt ratio[i]: [m] Def. 3. dat.



n 8. dat. ergo et ratio ipſius BD ad BC data eſt [n]. Rectus autem
o Per conſtruct. eſt angulus BDC [o]: quare triangulum BDC ſpecie da-
p 43. dat. tum eſt [p]: datus igitur eſt angulus BCD. Eſt autem
q ex hyp. angulus BAC datus [q]: quare et reliquus angulus ABC
r 32. primi, et 4. dat. datus eſt [r]. Triangulum igitur ABC ſpecie datum eſt [s].
s 40. dat.

Sed ſit angulus BAC obtuſus; atque a puncto B in rectam CA productam perpendicularis deducatur BE. Et quoniam angulus BAC datus eſt; etiam et qui deinceps eſt, angulus BAE, datus
t 13. primi, et 4. dat. erit [t]. Eſt autem et angulus BEA datus: reliquus igitur EBA da-

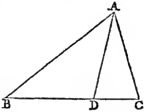


tus eſt [r]: quare triangulum EBA ſpecie datum eſt [s]:
u Def. 3. dat. ergo ratio ipſius EB ad BA data eſt [u]. Eſt autem ratio ipſius AB ad BC data [q]: quare et ratio ipſius EB ad BC data eſt [n]. Sed rectus eſt angulus BEC [o]: ergo triangulum EBC ſpecie datum eſt [p]: quare datus eſt angulus BCE [q]. Eſt autem angulus BAC datus [q]: itaque reliquus angulus ABC datus eſt. Triangulum igitur ABC ſpecie datum eſt [s]. *Q. E. D.*

[XLV.] PROP. XLV.

Si triangulum angulum unum habeat datum; circa datum autem angulum latera ſimul utraque, tanquam unum, ad reliquum latus habeant rationem datam: triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

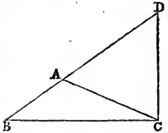
Sit triangulum ABC, quod unum angulum BAC habeat datum; circa angulum autem BAC latera, hoc eſt, BA, AC, ſimul utraque, tanquam unum, ad BC rationem habeant datam: dico triangulum ABC ſpecie datum eſſe.
x 9. primi. Secetur enim angulus BAC bifariam rectâ AD [x]: ita-
y 2. dat. que datus eſt angulus BAD [y]. Quoniam vero ut BA ad AC,
z 3. ſexti. ita BD ad DC [z]; erit quoque permutando ut AB ad BD, ita AC ad CD: adeoque ut ſimul utraque BA, AC ad BC,
a 12. quinti. ita erit AB ad BD [a]. Data autem eſt ratio utriuſque ſi-
b ex hyp. mul BA, AC ad BC [b]: quare et



ratio

ratio ipſius A B ad B D data eſt. Et datus etiam eſt angulus B A D: quare triangulum A B D ſpecie datum eſt[d]: [d] 44. dat.
angulus igitur A B D datus eſt. Datus autem eſt angulus [e] ex hyp.
B A C[e]. Itaque in triangulo A B C reliquus angulus A C B [f] 32. primi,
datus eſt[f]. Ergo triangulum A B C ſpecie datum eſt[g]. et 4. dat. [g] 40. dat.
Q. E. D.

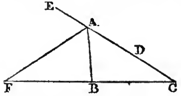
Aliter. Producatur B A in directum, et ipſi A C ponatur æqualis A D[h], et connectatur D C. [h] 3. primi.
Quoniam vero ratio ſimul utriuſque B A, A C ad B C data eſt, atque æqualis eſt C A ipſi D A: igitur ratio totius B A D ad B C data eſt. Verum datus eſt angulus A D C; dimidius namque eſt ipſius B A C[i]. Igitur triangulum B D C ſpecie datum eſt[k]: [i] 5. et 32. primi.



ergo angulus A B C datus eſt[l]. Angulus autem B A C [k] 44. dat.
etiam datus eſt[m]: quare in triangulo A B C reliquus A C B [l] Def. 3. dat.
datus eſt[n]. Triangulum igitur A B C ſpecie datum eſt[o]. [m] ex hyp. [n] 32. primi, et 4. dat.
Q. E. D. [o] 40. dat.

Cor. * Et ſi triangulum unum ex angulis datum habeat, et differentia laterum circa datum angulum ad reliquum latus datam rationem habeat, triangulum ſpecie datum eſt.

Trianguli B A C detur angulus B A C. Laterum A B, A C majus eſto A C. Ablatoque A D, quod minori A B æquale ſit, detur ratio D C ad B C. Dico triangulum



B A C ſpecie datum. Producto enim latere C A, angulus externus B A E medius dividatur recta A F, quæ baſi C B productæ in F occurrat. Erit C A ad C F, ut A B, ſive A D, ad B F[p]. Ac proinde C A ad C F, ut C D ad C B[q]. [p] 3. ſexti.
Sed [q] 19. quinti.

[r] ex hyp. [s] 3. dat. [t] 44. dat. [u] 40. dat.

Sed data eſt ratio C D ad C B[r]. Ergo ratio C A ad C F data. Sed propter datum angulum C A B, datur B A E, ejuſque ſemiſſis B A F. Totus igitur C A F datur[s]. Triangulum igitur C A F, cujus angulus C A F datus, lateraque C A, C F ratio data, ſpecie datum eſt[t]. Angulus igitur A C B datus. Sed et C A B[r]. Quare et reliquus trianguli B A C angulus A B C datus. Triangulum igitur ſpecie datum[u]. *Q. E. D.*

[XLVI.]

PROP. XLVI.

Si triangulum unum angulum habeat datum; circa alium autem angulum ſimul utraque latera, tanquam unum, habeant ad reliquum rationem datam: triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

Vide fig. 2. pag. 38.

Sit triangulum A B C, quod unum angulum A B C datum habeat, circa alium autem angulum B A C ſimul utraque latera, tanquam unum, (hoc eſt, B A, A C) ad B C datam rationem habeant: dico triangulum A B C ſpecie datum eſſe.

[x] 9. primi. [y] Per oſtenſa in præc. [z] ex hyp. [a] 41. dat. [b] Def. 3. dat. [c] Per conſtruct. [d] 2. dat. [e] 32. primi, et 4. dat. [f] 40. dat.

Secetur enim angulus B A C bifariam rectâ A D[x]: itaque erit ut ſimul utraque B A, A C ad B C, ita A B ad B D[y]. Eſt autem ratio ſimul utriuſque B A, A C ad B C data[z]; ergo et ratio ipſius A B ad B D data eſt. Datus autem eſt angulus A B D[z]: ergo triangulum A B D ſpecie datum eſt[a]: quare angulus B A D datus eſt[b]. Ipſius autem duplus eſt angulus B A C[c]: igitur angulus B A C datus eſt[d]. Eſt autem et angulus A B C datus[z]: quare et angulus A C B datus eſt[e]. Triangulum igitur A B C ſpecie datum eſt[f]. *Q. E. D.*

Vide fig. 1. pag. 39. [g] ex hyp. [h] ex conſtruct. [i] 41. dat. [k] Def. 3. dat. [l] 5. et 32. primi. [m] 40. dat.

Aliter. Producatur B A in directum, et ponatur ipſi C A æqualis D A, et connectatur recta D C. Quoniam vero data eſt ratio ſimul utriuſque B A, A C ad B C[g]; eſtque C A æqualis ipſi A D[h]: igitur ratio ipſius D B ad B C data eſt. Datus autem eſt angulus A B C[g]: quare triangulum D B C ſpecie datum eſt[i]; ergo datus eſt angulus B D C[k]. Eſtque hujus duplus angulus B A C[l]: angulus igitur B A C datus eſt: quare et reliquus A C B datus eſt. Triangulum igitur A B C ſpecie datum eſt[m]. *Q. E. D.*

Cor. * Et ſi triangulum unum ex angulis datum habeat, et differentia laterum circa alium angulum ad tertium latus datam rationem habeat; triangulum ſpecie datum eſt.

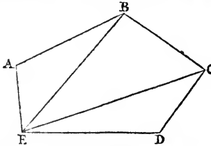
PROP.

PROP. XLVII. [XLVII.]

Rectilinea specie data in data specie triangula dividuntur.

Sit datum specie rectilineum A B C D E: dico rectilineum A B C D E in data specie triangula dividi.

Connectantur enim rectæ B E, E C. Quoniam vero rectilineum A B C D E specie datum est; igitur angulus B A E datus est [n], et etiam ratio lateris B A ad E A data. [n] Def. 3. dat.



Quoniam itaque angulus B A E datus est, atque ratio ipsius B A ad A E data; triangulum B A E specie datum est [o]. Quare angulus A B E datus est [n]. Totus autem [o] 41. dat. angulus A B C datus est [n]: ergo et reliquus E B C datus est [p]. Ipsius autem A B ad B E, necnon ipsius A B ad [p] 4. dat. B C data est ratio: ergo ratio quoque lateris B C ad B E data est [q]. Sed et datus est angulus C B E: triangulum [q] 8. dat. igitur B C E specie datum est [o]. Simili vero ratione et triangulum C D E specie datum est. Rectilinea igitur specie data in data specie triangula dividuntur. *Q. E. D.*

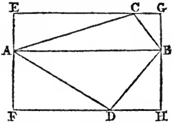
PROP. XLVIII. [XLVIII.]

Si ab eâdem rectâ triangula specie data describantur; habebunt ad invicem rationem datam.

Ab eâdem enim rectâ A B duo triangula specie data describantur A B C, A B D: dico rationem trianguli A B C ad triangulum A B D datam esse.

Agantur enim a punctis A, B ipsi A B ad rectos angulos rectæ A E, B G. Per puncta autem C, D ipsi A B parallelæ ducantur E C G, F D H [s]; quæ rectis A E, B G, [s] 31. primi. in utramque partem productis, in punctis E, G, F, H occurrant. Quoniam autem triangulum A B C specie datum [t] ex hyp. est [t]; ipsius C A ad B A ratio data erit [u]. Quoniam itaque angulus C A B datus est, datusque est angulus E A B: [u] Def. 3. dat.

etiam



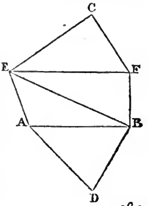
[x] 4. dat. etiam reliquus C A E datus erit[x]. Angulus autem A E C datus eſt: ideoque reliquus angulus E C A datus eſt; [y] 40. dat. quare triangulum A E C ſpecie datum eſt[y]: igitur ipſius [z] Def. 3. dat. E A ad A C ratio eſt data[z]. Sed et ratio C A ad A B data [a] ex hyp. eſt[a]: quare ipſius quoque E A ad A B ratio data erit[b]. [b] 8. dat. Similiter vero ipſius F A ad A B ratio eſt data: quare et ipſius E A ad A F data eſt ratio[b]. Eſt autem ut A E ad A F, ita parallelogrammum A G ad parallelogrammum [c] 1. ſexti. H A[c]: ideoque ratio parallelogrammi A G ad parallelogrammum H A data eſt. Sed parallelogrammi quidem [d] 41. primi. A G dimidium eſt triangulum A B C[d]; parallelogrammi vero A H dimidium eſt A D B. Trianguli igitur A B C ad triangulum A D B data eſt ratio. *Q. E. D.*

[XLIX.]

PROP. XLIX.

Si ab eâdem rectâ lineâ duo quælibet rectilinea ſpecie data deſcribantur; habebunt ad invicem rationem datam.

Ab eâdem enim rectâ A B duo rectilinea quæcunque ſpecie data deſcribantur, ut A E C F B, A D B: dico rationem ipſius A E C F B ad A D B datam eſſe.



Connectantur enim B E, F E: itaque unumquodque triangulorum E F C, E F B, E A B ſpe- [e] 47. dat. cie datum eſt[e]. Quoniam vero ab eâdem rectâ E F triangula ſpecie data E F C, E F B deſcripta ſunt; ratio C E F ad [f] 48. dat. F E B data eſt[f]: quare componendo, ratio ipſius C E B F [g] 6. dat. ad E B F data eſt[g]. Ipſius etiam F E B ad E A B data ratio eſt;

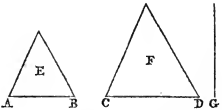
eſt [e]; quandoquidem ab eâdem rectâ B E triangula ſpecie data deſcripta ſunt, F E B, E A B: quare ipſius C E B F ad E A B data eſt ratio [f]: componendo igitur ratio utriuſque C E A B F ad E A B data eſt [g]. Ratio autem ipſius E A B ad A D B data eſt [e]. Igitur ratio ipſius C E A B F ad A D B data eſt [f]. *Q. E. D.*

[e] 48. dat. [f] 8. dat. [g] 6. dat.

PROP. L. [L.]

Si duæ rectæ lineæ ad invicem habeant rationem datam; ab illis quoque ſimilia ſimiliterque deſcripta rectilinea ad invicem rationem datam habebunt.

Duæ enim rectæ A B, C D habeant ad invicem rationem datam, et deſcribantur ab illis ſimilia et ſimiliter poſita rectilinea E, F: dico rationem illorum ad invicem datam eſſe.



Accipiatur enim ipſius A B, C D tertia proportionalis G [h]: eſt igitur ut A B ad C D, ita C D ad G. Data autem eſt ratio rectæ A B ad rectam C D [i]: quare etiam ratio C D ad G data eſt: ideoque et ipſius A B ad G ratio data eſt [k]. Verum ut A B ad G, ita rectilineum E ad rectilineum F [l]. Ratio igitur ipſius E ad F data eſt. *Q. E. D.*

[h] 11. ſexti. [i] ex hyp. [k] 8. dat. [l] 19. aut 20. ſexti.

Cor. * (Ex Datis Simſoni.) Si duo ſimilia rectilinea datam inter ſe rationem habeant, latera eorum homologa datam inter ſe rationem habebunt. Similium rectilineorum E, F ſint A B, C D latera homologa. Habeat autem E ad F rationem datam. Dico A B ad C D rationem datam habere. Duabus enim A B, C D ſit G proportione tertia. Erit igitur E ad F, ut A B ad G [l]. Data autem ratio E ad F [l]. Ratio igitur ipſius A B ad G data. Unde propter continuam trium A B, C D, G analogiam, ratio A B ad C D data [m]. *Q. E. D.*

[m] 24. dat.

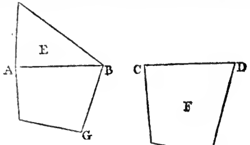
PROP.

[LI.] PROP. LI.

Si duæ rectæ lineæ habeant ad invicem rationem datam, atque ab illis rectilinea quæcunque specie data describantur; habebunt hæc ad invicem rationem datam.

Duæ enim rectæ A B, C D habeant ad invicem rationem datam; et describantur ab ipsis A B, C D rectilinea quæcunque specie data E, F: dico ipsius E ad F rationem datam esse.

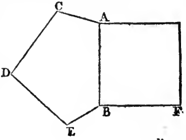
Describatur enim a rectâ A B, ipsi F simile et similiter positum rectilineum A G. Quoniam autem rectilineum E specie datum est, atque descriptum est ab eâdem rectâ



aliud rectilineum A G specie datum: ratio igitur ipsius
49. dat. E ad A G data est[n]. Et quoniam ratio ipsius A B ad C D data est, descriptaque sunt a rectis A B, C D similia et similiter posita rectilinea A G, F: ratio ipsius A G ad F
50. dat. data est[o]. Data autem est ratio ipsius A G ad E. Ergo
8. dat. et ratio ipsius E ad F data est[p]. *Q. E. D.*

[LII.] PROP. LII.

Si a datâ magnitudine rectâ figura specie data describatur; descripta figura magnitudine data est.



A datâ enim magnitudine rectâ A B describatur data specie figura A C D E B: dico figuram A C D E B magnitudine datam esse.

Describatur enim a rectâ A B quadratum
46. primi. A F[q]; datum itaque est ipsum specie et magnitudine.

tudine [r]. Et quia a rectâ A B duo rectilinea A C D E B, A F specie data, descripta sunt: igitur ratio ipsius A C D E B ad A F data est [s]. Quadratum autem A F magnitudine datum est: ergo etiam figura A C D E B magnitudine data est [t]. *Q. E. D.*

r Def. 3. dat.
s 49. dat.
t 2. dat.

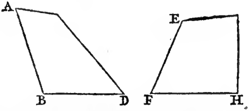
PROP. LIII. [LIII.]

Si duæ figuræ specie datæ fuerint, et unum latus unius ad unum latus alterius habuerit rationem datam; et etiam reliqua latera ad reliqua latera rationem datam habebunt.

Sint duæ figuræ specie datæ A D, E H, sitque ratio ipsius B D ad F H data: dico reliquorum etiam laterum ad reliqua rationem datam esse.

Quoniam enim ratio rectæ B D ad F H data est [u]; ipsiusque D B ad B A ratio est data [x]: erit quoque ratio A B ad ad F H data [y]. Rectæ autem F H ad E F ratio

u ex hyp.
x Def. 3. dat.
y 8. dat.



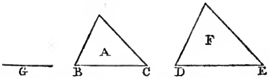
est data [x]: quare ipsius A B ad E F ratio erit data [y]. Similiter et reliquorum laterum ad reliqua latera ratio data erit. *Q. E. D.*

PROP. LIV. [LV.]

Si spatium magnitudine et specie datum fuerit, etiam latera ejus magnitudine data erunt.

Figura A specie et magnitudine detur. Dico figuræ A latus unumquodque, puta B C, magnitudine datum esse. Exponatur recta data D E. Et a rectâ D E rectilineo A simile similiterque positum describatur rectilineum F [z]. Rectilineum igitur F specie datum. Et, propter rectam D E magnitudine datam, magnitudine [a]. Datorum igitur F, A ratio data. Duabus D E, B C capiatur analogiâ tertia G. Et cum D E, B C figurarum F, A, similium

z 18. sexti.
a 52. dat.



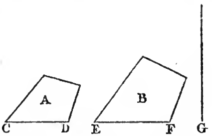
b Per construct. ſimilium ſimiliterque poſitarum latera ſint homologa [b], erit F ad A ut D E ad G [c]. Ratio autem F ad A data.
c 19. et 20. ſexti. Data igitur ratio D E ad G. Sed proportionales ſunt
d 24. dat. D E, B C, G. Quare ratio D E ad B C data [d]. Sed mag-
e 2. dat. nitudine data D E [b]. Quare et B C magnitudine data [e].
Q. E. D.

[LIV.] PROP. LV.

Si duæ figuræ ſpecie datæ ad invicem habuerint rationem datam; etiam eorum latera inter ſe habebunt rationem datam.

Duæ enim figuræ ſpecie datæ A, B habeant ad invicem rationem datam: dico eorum etiam latera ad invicem rationem datam habere.

Figura enim A ipſi B aut ſimilis eſt, aut non. Sit primum ſimilis, et ſumatur rectis C D, E F tertia pro-
f 11. ſexti. portionalis G [f]. Ideoque ut C D ad G, ita eſt A ad B [g].
g 20. ſexti.



h ex hyp. Eſt autem ratio ipſius A ad B data [h]: ergo et ratio ipſius C D ad G data eſt. Sunt autem C D, E F, G con-
l Per conſtruct. tinue proportionales [l], ipſius igitur C D ad E F data eſt
k 24. dat. ratio [k]. Similis vero eſt figura A ipſi B [h]: quare reliqua
l 53. dat. latera ad reliqua latera habebunt rationem datam [l].

Verum figura A non ſit ſimilis figuræ B, et deſcriba-
m 18. ſexti. tur ab E F ipſi A ſimilis et ſimiliter poſita E H [m]: itaque figura

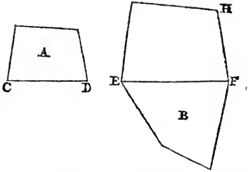
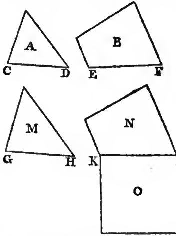


figura E H specie data est. Est autem figura B specie data[m]: ergo ratio ipsius B ad E H data est[n]: ideoque ratio ipsius A ad E H data est[o]. At vero similis est figura A ipsi E H[p]: ratio igitur rectæ C D ad E F data est[q]. Similiter et ratio reliquorum laterum ad reliqua latera data est. *Q. E. D.*

[m] ex hyp.
[n] 49. dat.
[o] 8. dat.
[p] Per constructionem.
[q] 20. sexti, et 24. dat.

Aliter.* Exponatur data recta G H. Et fiat ut C D ad E F, ita G H ad K L. Dein ab G H, L K describantur



figuræ ipsis A, B similes similiterque positæ M, N. Quarum proinde utraque specie data est. Cum autem

C D

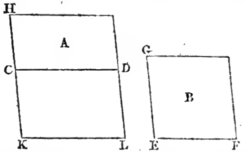
CD sit ad EF, ut GH ad KL; permutando erit CD ad GH, ut EF ad KL. Cum autem CD sit ad GH, ut EF ad KL; et a rectis CD, GH descriptae sint figurae similes similiterque positae A, M; a rectis autem EF, KL figurae
[p] 22. sexti. similes similiterque positae B, N; erit A ad M, ut B ad N[p], et permutando A ad B, ut M ad N. Ratio autem A ad
[q] ex hyp. B data[q]. Data igitur ratio M ad N. Figura autem M magnitudine data, nimirum cum specie data a rectâ
[r] 52. dat. magnitudine datâ descripta sit[r]. Quare et figura N
[s] 2. dat. magnitudine data[s]. A rectâ KL describatur quadratum O. Est igitur O figura specie data. Ratio igitur
[t] 49. dat. N ad O data[t]. Data autem N. Data igitur et O[s]; id est, quadratum ex rectâ KL magnitudine datum. Recta
[u] 55. dat. igitur KL magnitudine data[u]. Recta autem GH data[x].
[x] Per constr. Ratio igitur GH ad KL data[y]. Sed GH est ad KL, ut
[y] 1. dat. CD ad EF[x]. Ratio igitur CD ad EF data. *Q. E. D.*

[LVI.]

PROP. LVI.

Si duo aequiangula parallelogramma habuerint ad invicem rationem datam; est ut primi latus ad latus secundi, ita reliquum secundi latus ad rectam lineam, ad quam alterum primi latus habet rationem datam; quam nempe habet parallelogrammum ad parallelogrammum.

Duo enim aequiangula parallelogramma A, B habeant ad invicem rationem datam: dico ut CD ad EF ita esse EG ad eam, ad quam CH habet rationem datam; quam nempe parallelogrammum A habet ad parallelogrammum B.



Producatur enim CK in directum ipsi CH, et fiat ut
[z] 12. sexti. CD ad EF, ita EG ad CK[z]; compleaturque parallelogrammum CL. Quoniam ergo est ut CD ad EF, ita

EG

E G ad C K, estque recta C D æqualis ipsi K L [a]: igitur ut K L ad E F, ita E G ad C K. Adeoque circa æquales angulos C K L, G E F latera reciproce proportionalia sunt: quare æquale est K D ipsi G F [b]. Quoniam vero ratio A ad B data est; æquale autem est B ipsi C L: ipsius igitur H D ad C L ratio data est. Ut autem H D ad C L, ita H C ad C K [c]: ergo et ratio H C ad C K data est. Quoniam vero ut C D ad E F, ita est E G ad C K [d]; habetque recta H C ad C K rationem datam, eam nempe, quam habet spatium A ad B: est igitur ut C D ad E F, ita E G ad eam, ad quam H C habet rationem datam, eam nempe, quam spatium habet A ad spatium B. *Q. E. D.*

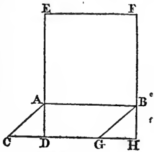
[a] 34. primi.
[b] 14. sexti.
[c] 1. sexti.
[d] Per construct.

PROP. LVII. [LVII.]

Si datum spatium ad datam rectam applicatum fuerit in angulo dato; datur quoque latitudo applicationis.

Datum enim spatium A G ad datam rectam A B applicetur in angulo C A B dato: dico datam esse rectam C A.

Describatur ab A B quadratum E B: itaque quadratum E B datum est. Rectæ E A, F B, si opus sit productæ, rectæ C G in punctis D, H occurrant. Et quoniam datum est utrumque spatiorum E B, A G: ratio igitur ipsius E B ad A G data est. Æquale autem est A H ipsi A G [e]: igitur ratio ipsius E B ad A H data est: unde et ratio E A ad A D data est [f]. Æqualis autem est E A ipsi A B: igitur ratio ipsius B A ad A D data est. Et quoniam datus est angulus C A B, et datus etiam est angulus D A B: reliquus igitur C A D datus est [g]. Angulus autem C D A datus est; quia rectus: quare reliquus A C D datus est [h]: ergo triangulum A D C specie datum est [i]; igitur ipsius A C ad A D data est ratio [k]. Data autem est ratio ipsius A D ad A B: igitur ratio ipsius C A ad A B data est [l]. Et data est A B [m]. Igitur data est A C [n]. *Q. E. D.*



[e] 35. primi.
[f] 1. sexti.
[g] 4. dat.
[h] 32. primi, et 4. dat.
[i] 40. dat.
[k] Def. 3. dat.
[l] 8. dat.
[m] ex hyp.
[n] 2. dat.

PROP.

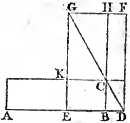
[LVIII.]

PROP. LVIII.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, deficiens datâ specie figurâ; latitudines defectûs etiam datæ sunt.

Datum enim spatium C A ad datam rectam A D applicetur, deficiens datâ specie figurâ D C: dico datam esse utramque rectarum B C, B D.

o 10. primi. Secetur enim A D bifariam in puncto E [o]: igitur data
p 2. dat. est E D magnitudine[p]. Dein describatur ab ipsâ E D ipsi C D simile similiterque positum recti-
q 18. sexti. lineum E F [q], et construatur figura: igitur specie datum est E F. Et quoniam a datâ rectâ E D, figura specie data descripta est E F; fi-
r 52. dat. gura E F data est magnitudine[r]. Est autem æqualis ipsis A C, K H
s 36. et 43. primi. simul sumptis[s]: quare figuræ A C, K H simul sumptæ datæ sunt magnitudine. Data vero
t ex hyp. est figura A C magnitudine[t]. Ergo reliqua figura K H
u 4. dat. data est magnitudine[u]. Sed et eadem specie data est;
x Per construct. similis enim est figuræ C D [x]: quare ipsius H K latera
y 55. dat. data sunt[y]: adeoque K C data est. Est autem æqualis
z 34. primi. ipsi E B [z]: ergo E B data est. Data vero est et E D: quare et reliqua D B data est[u]. Sed ratio ipsius B D
a Def. 3. dat. ad B C data est[a]: ergo B C data est[p]. *Q. E. D.*



Cor. * Si recta A D, magnitudine data, positione etiam data fuerit; datum erit punctum B.

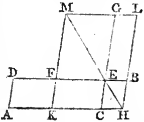
[LIX.]

PROP. LIX.

Si spatium datum ad datam rectam applicetur, excedens datâ specie figurâ; latitudines excessûs etiam datæ sunt.

Datum enim spatium A B ad datam rectam A C applicetur, excedens datâ specie figurâ C B: dico datam esse utramque rectarum H C, C E.

Secetur enim D E bifariam in puncto F, et describatur ab E F ipsi C B simile et similiter
b 18. sexti. positum rectilineum F G [b], atque construatur figura. Quoniam itaque C B simile est ipsi F G; circa eandem igitur dia-



metrum

metrum est F G cum ipso C B[c]. Est autem C B specie datum: ergo F G etiam specie datum est. Sed et a datâ rectâ F E descriptum est: quare F G magnitudine datum est[d]. Datum autem est A B[e]: ideoque A B, F G simul sumpta magnitudine data sunt. Ipsis autem A B, F G simul sumptis æquale est K L[f]: ergo K L magnitudine datum est[g]. Sed et specie datum est; simile enim est ipsi C B[h]: itaque ipsius K L latera data sunt[i]: ideoque latus K H datum est. Recta autem K C data est; datæ enim A C est dimidia[k]. Reliqua igitur recta C H data est; atque etiam rationem datam habet ad H B[l]: igitur data est H B[m]. *Q. E. D.*

[c 26. sexti. d 52. dat. e ex hyp. f 36. et 43. primi. g 3. dat. h Per construct. i 55. dat. k 34. primi. l Def. 3. dat. m 2. dat.]

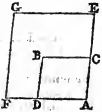
Cor. * Si recta A C, magnitudine data, positione etiam data fuerit; datum erit punctum B.

PROP. LX. [LX.]

Si datum specie et magnitudine parallelogrammum dato gnomone augeatur, aut minuatur; latitudines gnomonis datæ sunt.

Parallelogrammum enim A B specie et magnitudine datum augeatur primum dato gnomone E C B D F G: dico utramque rectarum C E, D F datam esse.

Quoniam enim datum est A B, est et gnomon E C B D F G datus; igitur spatium totum A G datum est. Sed et specie datum est A G; est enim simile ipsi A B[n]: igitur ipsius A G latera data sunt[o]: quare utraque rectarum A E, A F data est. Utraque autem rectarum C A, A D data est: reliqua igitur, nempe utraque rectarum E C, D F, data est[p].



[n 26. sexti. o 55. dat. p 4. dat.]

Rursus vero parallelogrammum A G, specie et magnitudine datum, minuatur dato gnomone E C B D F G: dico datam esse utramque rectarum C E, D F.

Quoniam enim datum est A G, cujus gnomon E C B D F G datus est: igitur reliquum A B magnitudine datum est[p]. Sed et specie datum est; etenim simile est ipsi G A[n]; latera igitur ipsius A B data sunt[o]: adeoque utraque rectarum C A, A D data est. Utraque autem rectarum E A, A F data est[q]; reliqua igitur, nempe utraque rectarum E C, D F data est[p]. *Q. E. D.*

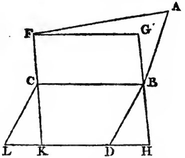
[q ex hyp.]

[LXI.]

PROP. LXI.

Si ad datæ ſpecie figuræ unum latus applicetur ſpatium parallelogrammum in angulo dato, habeat autem data figura ad parallelogrammum rationem datam; parallelogrammum ipſum ſpecie datum eſt.

Ad unum enim latus C B datæ ſpecie figuræ A F C B applicetur parallelogrammum ſpatium C D in angulo dato L C B, ſitque ratio figuræ A C ad parallelogrammum C D data: dico ipſum C D ſpecie datum eſſe.



q 31. primi. Agatur enim per punctum B ipſi F C parallela B G [q], per punctum autem F ipſi C B parallela F G; et productæ, ſi opus ſit, F C, G B rectæ L D in punctis K, H occurrant. Quoniam itaque datus eſt angulus F C B, et ratio ipſius
r Def. 3. dat. F C ad C B data [r]; parallelogrammum F B ſpecie datum eſt. Eſt autem figura A F C B ſpecie data; atque deſcriptum eſt ab eâdem rectâ C B datum ſpecie parallelogrammum F B: quare ratio figuræ A F C B ad parallelo-
s 49. dat. grammum F B data eſt [s]. Data autem eſt ratio ipſius
t ex hyp. A F C B ad C D [t]; eſt etiam C D æquale ipſi K B [u]: quare et
u 35. primi. x 8. dat. ratio ipſius K B ad C G data eſt [x]; adeoque et ratio rectæ
y 1. ſexti. F C ad C K data eſt [y]. Ipſius autem F C ad C B data eſt ratio [r]; ergo et ratio ipſius B C ad C K data eſt [x]. Quoniam vero datus eſt angulus F C B, etiam et qui dein-
z 13. primi, et 4. dat. ceps eſt angulus B C K datus eſt [z]. Angulus autem B C L datus eſt [t]: reliquus igitur L C K datus eſt [a]. An-
a 4. dat. b 29. primi. gulus item L K C datus eſt; æqualis enim eſt angulo
c 32. primi, et 4. dat. K C B [b]: ergo reliquus angulus C L K datus eſt [c]: triangulum igitur L K C ſpecie datum eſt [d]: quare ratio ip-
d 40. dat. ſius L C ad C K data eſt [r]. Ipſius autem C K ad B C data

eſt

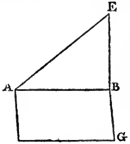
est ratio: igitur et ratio ipsius L C ad C B data est [g]. Et datus est angulus L C B [h]. Itaque parallelogrammum C D specie datum est [i]. *Q. E. D.* [g] 1. dat. [h] ex hyp. [i] Def. 3. dat.

PROP. LXII. [LXII.]

Si duae rectae ad invicem habeant rationem datam, et ab unâ quidem data specie figura descripta sit, ab alterâ autem spatium parallelogrammum in angulo dato; habeat etiam figura ad parallelogrammum rationem datam: parallelogrammum ipsum specie datum est.

Duae enim rectae A B, C D habeant ad invicem rationem datam, et describatur a rectâ quidem A B data specie figura A E B, a rectâ autem C D parallelogrammum D F in angulo F C D dato; sit etiam ratio ipsius A E B ad parallelogrammum F D data: dico parallelogrammum D F specie datum esse.

Describatur enim a rectâ A B ipsi F D simile similiterque positum parallelogrammum A G [k]. Quoniam igitur ratio ipsius A B ad C D data est, atque descripta sunt a [k] 18. sexti.



rectis A B, C D similia similiterque posita rectilinea A G, F D; ratio ipsius A G ad F D data est [l]. Ratio autem ipsius F D ad A E B data est [m]: quare et ratio ipsius A E B ad A G data est [n]. Sed et datus est angulus A B G; siquidem aequalis est angulo F C D [o]. Quoniam igitur figura A E B specie data est, et ad unum ejus latus A B applicatum est parallelogrammum A G in angulo dato A B G; et ratio figurae A E B ad parallelogrammum A G data; ipsum igitur A G specie datum est [p]. Simile autem est ipsi F D [o]: quare et parallelogrammum F D specie datum est [q]. *Q. E. D.* [l] 50. dat. [m] ex hyp. [n] 8. dat. [o] Per constr. [p] 61. dat. [q] Def. 3. dat.

 PROP.

[LXIII.] PROP. LXIII.

Si triangulum sit specie datum; quod ab unoquoque laterum describitur quadratum ad triangulum habebit rationem datam.

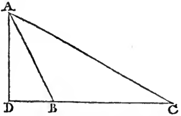
Patet ex xlix. cujus casus est.

[LXIV.] PROP. LXIV.

Si triangulum angulum obtusum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum obtusum subtendens magis potest quam latera obtusum angulum ambientia, ad triangulum habebit rationem datam.

Sit triangulum obtusangulum A B C, quod angulum obtusum A B C datum habeat; et producatur in directum ipsi B C recta B D, et a puncto A ad rectam D C perpendicularis agatur A D: dico quod spatium, quo quadratum rectæ A C excedit quadrata rectarum A B, B C, hoc est, rectangulum, quod bis continetur sub D B, B C, ad triangulum A B C habebit rationem datam.

Quoniam enim angulus A B C datus est, etiam et A B D datus erit [a]. Verum et est angulus A D B datus; igitur et reliquus D A B datus erit [t]: quare et triangulum A B D specie datum est [u]: ratio igitur ipsius A D ad D B data est [x]. Estque ut A D ad D B, ita quod continetur sub A D, B C ad id, quod sub D B, B C continetur [y]. Ergo ratio ejus, quod continetur sub A D, B C ad id, quod sub D B, B C continetur, data est: quare ratio ejus, quod bis continetur sub D B, B C ad id, quod continetur sub A D, B C data est. Sed id, quod continetur sub A D, B C, ad triangulum A B C habet rationem datam [z]. Itaque ratio ejus quod bis continetur sub D B, B C ad triangulum A B C data est [a]. Quod vero bis continetur sub D B, B C, est spatium, quo quadratum rectæ A C excedit quadrata rectarum A B, B C [b]. Igitur spatium istud ad triangulum A B C rationem habet datam. *Q. E. D.*



[a] 13. primi, et 4. dat.
[t] 32. primi, et 4. dat.
[u] 40. dat.
[x] Def. 3. dat.
[y] 1. sexti.
[z] 41. primi.
[a] 8. dat.
[b] 12. secundi.

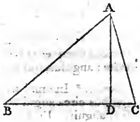
PROP.

PROP. LXV. [LXV.]

Si triangulum angulum acutum datum habeat; illud spatium, quo latus angulum acutum subtendens minus potest quam latera angulum acutum ambientia, habebit ad triangulum rationem datam.

Sit triangulum acutangulum A B C, quod datum angulum acutum habeat A B C; et agatur a puncto A ad B C perpendicularis A D: dico quod spatium, quo minus est quadratum rectæ A C quam quadrata linearum A B, B C, hoc est, id quod bis continetur sub C B, B D, habet ad triangulum A B C rationem datam.

Quoniam enim angulus A B D datus est[c], estque etiam angulus A D B datus; reliquus igitur B A D datus est[d]: itaque triangulum A B D specie datum est[e]. Quare ratio ipsius B D ad D A data est[f]: ideoque et ejus, quod continetur sub C B, B D ad id, quod continetur sub C B, A D data est ratio[g]. Sed ejus, quod continetur sub B C, A D, ad triangulum A B C data ratio est[h]: quare et ejus, quod bis continetur sub C B, B D, ad triangulum A B C ratio est data[i]. Verum quod bis continetur sub C B, B D est id, quo quadratum rectæ A C minus est quam quadrata rectarum A B, B C[k]. Igitur illud spatium, quo minus est quadratum rectæ A C quam quadrata rectarum A B, B C, ad triangulum A B C habebit rationem datam. *Q. E. D.*



c ex hyp.
d 32. primi, et 4. dat.
e 40. dat.
f Def. 3. dat.
g 1. sexti.
h 41. primi.
i 8. dat.
k 13. secundi.

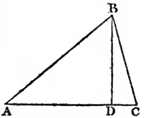
Cor. * Et e converso, si spatium, quo latus trianguli plus minusve potest quam reliqua latera, ad triangulum habeat rationem datam; angulus lateri illi oppositus datus est.

PROP. LXVI. [LXVI.]

Si triangulum habuerit angulum datum; quod sub rectis datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum, habebit ad triangulum rationem datam.

Sit triangulum A B C, quod datum angulum habeat ad A: dico rectangulum sub B A, A C comprehensum habere ad triangulum A B C rationem datam.

Agatur enim a puncto B ad rectam A C perpendicu-
l 12. primi. laris B D[l]. Quoniam itaque angulus B A C datus eſt, atque etiam angulus B D A datus eſt; reliquus quoque A B D datus
m 32. primi, et 4. dat. eſt[m]: ergo triangulum A B D
n 40. dat. ſpecie datur[n]; quare ipſius A B ad B D data eſt ratio. Ut autem A B ad B D, ita rectangulum ſub B A, A C ad rectan-
o 1. ſexti. gulum ſub B D, A C[o]: igitur rectanguli ſub B A, A C ad rectangulum ſub B D, A C ratio eſt data. Atqui rectanguli ſub B D, A C ad triangulum A B C data eſt ratio, binarii ſcilicet ad unita-
p 41. primi. tem[p]. Igitur ratio rectanguli ſub B A, A C ad triangu-
q 8. dat. lum A B C data eſt[q]. *Q. E. D.*



Cor. 1.* Et e converſo, ſi rectangulum duobus trianguli lateribus comprehenſum ad triangulum habeat rationem datam; angulus, qui lateribus illis continetur, datus eſt.

Cor. 2.* In omni triangulo rectangulo, rectangulum lateribus circa angulum rectum comprehenſum duplum eſt trianguli. Et in omni triangulo obtuſangulo, rectangulum lateribus circa angulum obtuſum comprehenſum duplo trianguli majus eſt.

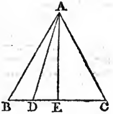
Cor. 3.* Contra, ſi rectangulum duobus trianguli lateribus comprehenſum duplum ſit trianguli, rectus eſt angulus, qui lateribus comprehenſus eſt. Quod ſi rectangulum ſub lateribus majus ſit duplo trianguli, angulus, qui lateribus comprehenditur, obtuſus eſt.

* LEMMA I.

Si a vertice trianguli iſoſcelis deducatur recta, quæ baſin utcunque dividat; quadratum ex deductâ et rectangulum ſub baſeos ſegmentis ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato ex alterutro laterum æqualium.

A vertice A trianguli iſoſcelis C A B deducatur A D, quæ baſin B C, in puncto D, utcunque dividat. Dico quadratum ex A D et rectangulum C D × D B ſimul ſumpta quadrato ex A B vel A C æqualia. A puncto enim A in baſin B C ad perpendiculum deducatur A E. Hæc baſin B C in puncto E mediam dividet. Jam vero qua-

quadratum ex A D quadratis duobus ex A E, E D æquale eſt [p]. Addatur utrinque rectangulum C D × D B. Et quadratum ex A D cum rectangulo C D × D B æquale erit quadratis duobus ex A E, E D cum rectangulo C D × D B, ſive quadrato ex A E, cum quadrato ex E D et rectangulo C D × D B. Quadratum autem ex E D et rectangulum C D × D B ſimul ſumpta æqualia ſunt quadrato ex E B [q]. Quadratum igitur ex A D cum rectangulo C D × D B æquale eſt duobus quadratis ex A E, E B ſimul ſumptis, hoc eſt, quadrato ex A B [p]. *Q. E. D.*



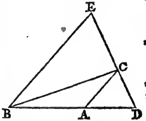
[p] 47. primi.
[q] 5. ſecundi.

PROP. LXVII. [LXVII.]

Si triangulum habuerit angulum datum; illud ſpatium, quo duo datum angulum comprehendentia latera, tanquam una recta, plus poſſunt quam quadratum a reliquo latere, ad triangulum habebit rationem datam.

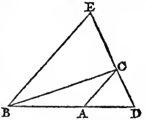
Sit triangulum A B C, quod angulum B A C datum habeat: dico quod illud ſpatium, quo quadratum ex utrâque ſimul B A, A C, tanquam unâ rectâ, majus eſt quam quadratum a rectâ B C, ad triangulum A B C habebit rationem datam.

Producatur enim in directum ipſi B A recta A D, et fiat ipſi A C æqualis A D [r], et jungatur D C; et agatur per punctum B ipſi A C parallela B E [s], quæ rectæ D C productæ in E occurrat. Et quoniam æqualis eſt A D ipſi A C: æqualis quoque eſt D B ipſi B E [t]. Iſoſceles igitur eſt triangulum D B E. Et a vertice B in baſin D E deducta eſt quædam recta B C: igitur quod continetur ſub D C, C E una cum quadrato rectæ B C æquale eſt quadrato rectæ B D [u]. Eſt autem D A ipſi A C æqualis: ergo quod ab utrâque ſimul B A, A C quadratum æquale eſt ei quod a B D; hoc eſt, ei quod continetur ſub D C, C E una cum quadrato rectæ B C; ideoque et quod ab utrâque ſimul B A, A C, majus eſt quam quadratum rectæ B C eo, quod continetur ſub



[r] 3. primi.
[s] 31. primi.
[t] 4. ſexti, et 14. quinti.
[u] Lem. 1*. dat.

fub D C, C E. Dico jam quod ratio rectanguli fub D C, C E ad triangulum A B C data eft. Quoniam enim datus eft angulus B A C; et qui deinceps eft D A C datus eft[x]. Uterque autem angulorum A D C, D C A datus eft; etenim uterque dimidius eft anguli B A C[y], qui datus eft[z]: quare triangulum D A C fpecie datum eft[a]. Ergo ratio ipfius A D ad D C data eft[b]: ideoque et ejus quod a rectâ A D ad id quod a D C defcribitur quadratum ratio eft data[c]. Quoniam vero ut B A ad A D, ita eft E C ad C D[d]; atque ut B A quidem ad A D, ita rectangulum fub B A, A D ad quadratum rectæ A D[e]; atque etiam ut E C ad C D, ita rectangulum fub E C, C D ad quadratum rectæ C D: erit igitur ut rectangulum fub B A, A D ad quadratum ex A D, ita rectangulum fub E C, C D ad quadratum ex C D; ideoque permutando ut id quod continetur fub B A, A D ad id, quod continetur fub E C, C D, ita erit quod a rectâ A D ad id quod a rectâ C D defcribitur quadratum[f]. Ratio autem quadrati rectæ A D ad quadratum rectæ D C data eft: igitur et ratio ejus quod continetur fub B A, A D ad id, quod fub E C, C D continetur, data eft. Æqualis autem eft D A ipfi A C[g]: igitur et ratio ejus quod continetur fub B A, A C ad id quod fub E C, C D continetur data eft. Ratio autem rectanguli fub B A, A C ad triangulum B A C data eft, quia datus eft angulus B A C[h]: quare et ratio rectanguli fub E C, C D ad triangulum A B C data eft[i]. Et eft rectangulum fub D C, C E id, quo quadratum ab utrâque fimul B A, A C majus eft quam quadratum rectæ B C[k]. Igitur quo majus eft quadratum ab utrâque fimul B A, A C quam quadratum rectæ B C, illud fpatium ad triangulum A B C rationem datam habebit. *Q. E. D.*



[x] 13. primi, et 4. dat.
[y] 5. et 32. primi.
[z] ex hyp.
[a] 40. dat.
[b] Def. 3. dat.
[c] 50. dat.
[d] 2. fexti.
[e] 1. fexti.
[f] 16. quinti.
[g] Per conftruct.
[h] 66. dat.
[i] 8. dat.
[k] Per fupra oftenfa.

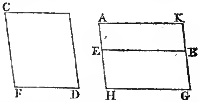
[LXVIII.]

PROP. LXVIII.

Si duo parallelogramma æquiangula habeant ad invicem rationem datam, atque unum latus ad unum latus habeat rationem datam; etiam reliquum latus ad reliquum latus rationem habebit datam.

Duo enim æquiangula parallelogramma A B, C D habeant ad invicem rationem datam; habeat autem et unum

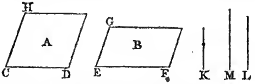
unum latus ad unum latus rationem datam, ſitque ratio B E ad F D data: dico ipſius quoque A E ad F C rationem eſſe datam.



Applicetur enim ad rectam E B ipſi C D æquale parallelogrammum E G, atque ita conſtituatur, ut in directum jaceat E H ipſi A E: adeoque recta B G in directum erit ipſi K B. Quoniam itaque data eſt ratio ipſius A B ad C D [l]; C D vero æquale eſt ipſi E G [m]: igitur ratio ipſius A B ad E G data eſt: adeoque et ratio ipſius A E ad E H etiam eſt data [n]. Et quoniam parallelogrammum E G ipſi C D æquale eſt, erit ut E B ad F D, ita C F ad E H [o]. Sed ratio ipſius F B ad F D data eſt [l]: igitur et ratio ipſius C F ad E H data eſt. Ipſius autem E H ad A E ratio eſt data: ergo et ratio ipſius A E ad C F data eſt [p]. *Q. E. D.*

[l] ex hyp.
[m] Per conſtruct.
[n] 1. ſexti.
[o] 14. ſexti.
[p] 8. dat.

Aliter *. Parallelogramma æquiangula, A, B habeant inter ſe rationem datam. Habeant quoque latera C D, E F inter ſe rationem datam. Dico reliquorum etiam



laterum C H, E G rationem datam eſſe. Exponatur enim data recta K. Quoniam data eſt ratio C D ad E F, huic eadem ſit ratio K ad M. Ratio igitur K ad M data; et propter K magnitudine datam, datur etiam M [q]. Habeat M ad L rationem eam, quam C H ad E G. Ratio K ad L compoſita eſt ex rationibus K ad M et M ad L [r]; id eſt, ex rationibus C D ad E F, et C H ad E G. Sed ex eiſdem rationibus C D ad E F, et C H ad E G compoſita

[q] 2. dat.
[r] Def. 5. ſexti.

eſt

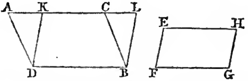
[s] 23. sexti. est ratio parallelogrammi A ad parallelogrammum B[s]. Est igitur K ad L, ut A ad B; id est, in datâ ratione.
[t] 2. dat. Recta autem K magnitudine data. Quare et L data[t].
[u] ostensum enim. Data utem M[u]. Ratio igitur M ad L data[t]. Est autem M ad L, ut C H ad E G[x]. Ratio igitur C H ad E G
[x] Per construct. data. *Q. E. D.*

[LXIX.] PROP. LXIX.

Si duo parallelogramma datos angulos habeant, et ad invicem rationem datam; habeat autem et unum latus ad unum latus rationem datam: et reliquum latus ad reliquum latus habebit rationem datam.

Duo enim parallelogramma A B, E G, habentia datos angulos ad puncta D, F ad invicem rationem datam habeant; sitque etiam ratio ipsius D B ad F G data: dico ipsius quoque A D ad E F rationem datam esse.

[y] 68. dat. Si A B ipsi E G æquiangulum quidem sit, res manifesta est[y]. Si vero non sit illi æquiangulum; constituatur ad rectam D B, et ad punctum in illâ D, angulo



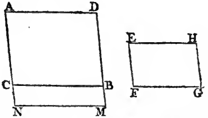
[z] 23. primi. E F G æqualis angulus B D K[z], et compleatur parallelogrammum D L[a].
[a] 31. primi. Et quoniam uterque angulorum D A K,
[b] ex hyp. A K D datus est[b]; reliquus igitur A D K datus est[c];
[c] 32. primi, et 4. dat. quare triangulum A D K specie datum est[d]; ideoque
[d] 40. dat. ratio ipsius A D ad D K data est. Quoniam vero ratio ipsius D C ad F H data est[b]; atque æquale est D C ipsi
[e] 35. primi. D L[e]: ratio igitur ipsius D L ad F H data est. Cumque
[f] Per construct. æquiangulum sit D L ipsi F H[f], et ratio ipsius D L ad F H data sit; necnon ratio ipsius D B ad F G data[b]: ratio
[g] 68. dat. igitur ipsius D K ad E F data est[g]. Est autem ratio
[h] ex mox ostensis. ipsius D K ad A D data[h]: ergo et ratio ipsius A D ad E F
[i] 8. dat. data est[i]. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. LXX. [LXX.]

Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; et ipsa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

Duorum enim parallelogrammorum A B, E G, circa æquales angulos ad puncta C, F, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera habeant ad invicem rationem datam; nempe data sit ratio ipsius A C ad E F; sit quoque ratio ipsius C B ad F G data: dico quod ratio ipsius C D ad F H data est.

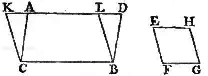


Sit enim primo C D ipsi F H æquiangulum. Et applicetur ad rectam C B parallelogrammo F H æquale parallelogrammum C M, atque ita constituatur, ut C N in directum sit ipsi A C[k]: erit igitur et B M ipsi D B in directum. Quoniam itaque B N ipsi F H æquiangulum est et æquale: ipsorum igitur B N, F H latera circum æquales angulos sunt reciproce proportionalia[l]; adeoque ut C B ad F G, ita est F E ad C N. Est autem ratio ipsius C B ad F G data[m]: ipsius igitur E F ad C N data[m] est ratio. Verum ipsius E F ad A C ratio est data[m]: quare ratio ipsius A C ad C N data est[n]: adeoque et ratio ipsius C D ad C M data est[o]. Æquale autem est C M ipsi F H[p]. Ergo ratio ipsius C D ad F H data est.

[k] 45. primi.
[l] 14. sexti.
[m] ex hyp.
[n] 8. dat.
[o] 1. sexti.
[p] Per construct.

Non sit autem A B æquiangulum ipsi E G. Et constituatur ad rectam B C, et datum in eâ punctum C, angulo E F G æqualis angulus B C K[q]; compleaturque parallelogrammum C L. Quoniam vero angulus A C B datus est[m]; atque angulus K C B datus[p]: igitur reliquus A C K datus est[r]. Est autem et C A K datus: unde reliquus A K C datus est[s]: triangulum igitur A C K specie datum

[q] 23. primi.
[r] 4. dat.
[s] 32. primi, et 4. dat.



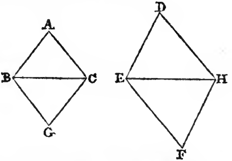
[t] 40. dat. datum eſt [t]: adeoque ratio ipſius A C ad C K data eſt.
[u] ex hyp. Ipſius autem A C ad E F data eſt ratio [u]: quare et ratio
[x] 8. dat. ipſius C K ad E F data eſt [x]. Ipſius autem C B ad F G
[y] Per conſtruct. ratio data eſt [u]; atque æqualis eſt angulus K C B angulo E F G [y]: igitur ratio ipſius C L ad F H eſt data [z]. Æqualia
[z] Per part. prior. hujus. autem ſunt parallelogramma C L, C D [a]. Quare C D ad F H rationem datam habet. *Q. E. D.*
[a] 35. primi.

[LXXI.]

PROP. LXXI.

Si duorum triangulorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam; ipſa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

Duorum enim triangulorum A B C, D E H, circa æquales angulos ad puncta A, D, aut circa inæquales quidem, datos tamen, latera ad invicem habeant rationem datam, ſitque ratio ipſius quidem B A ad E D, necnon ipſius A C ad D H data: dico rationem trianguli A B C ad triangulum D E H datam eſſe.



Compleantur enim parallelogramma A G, D F. Quoniam itaque duorum parallelogrammorum A G, D F, circa æquales angulos ad puncta A, D, aut inæquales quidem, ſed tamen datos, latera ad invicem habent rationem datam: ratio ipſius A G ad D F data eſt [b]. Sed
[b] 70. dat.

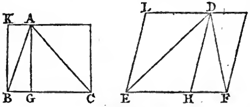
ipſius

ipsius quidem A G dimidium est triangulum A B C [y]; ipsius vero D F dimidium triangulum D E H. Ergo trianguli ABC ad triangulum D E H ratio est data. *Q. E. D.* [y] 34. primi.

PROP. LXXII. [LXXII.]

Si duorum triangulorum bases fuerint in ratione datâ, atque etiam rectæ actæ ab angulis ad bases, quæ faciant angulos æquales, aut inæquales quidem, sed tamen datos, habeant ad invicem rationem datam: ipsa quoque triangula ad invicem rationem datam habebunt.

Sint duo triangula A B C, D E F, et agantur rectæ A G, D H, quæ angulos A G C, D H F ad bases faciant,



aut æquales, aut inæquales quidem, sed tamen datos; sitque ratio ipsius B C ad E F data, atque etiam ipsius A G ad D H: dico etiam rationem trianguli A B C ad triangulum D E F datam esse.

Compleantur enim parallelogramma K C, L F. Et quoniam anguli A G C, D H F aut æquales sunt [z], aut inæquales quidem, sed tamen dati, angulus autem A G C angulo K B C est æqualis, necnon angulus D H F angulo L E F [a]: anguli igitur ad puncta B, E aut æquales sunt, aut inæquales quidem, sed tamen dati. Quoniam vero ratio ipsius A G ad D H data est [z], et est A G quidem ipsi K B, atque D H ipsi L E æqualis [b]: ratio igitur ipsius K B ad L E data est. Est autem et ratio ipsius B C ad E F data [z]. Igitur ratio parallelogrammi K C ad parallelogrammum L F est data [c]. Adeoque ratio trianguli A B C ad triangulum D E F data est [d]. *Q. E. D.*

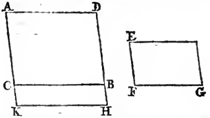
[z] ex hyp.
[a] 29. primi.
[b] 34. primi.
[c] 70. dat.
[d] 41. primi.

PROP.

[LXXVII.] PROP. LXXIII.

Si duorum parallelogrammorum, circa æquales angulos, aut circa inæquales quidem, sed tamen datos, latera ita se habeant, ut sit quemadmodum primi latus ad secundi latus, ita reliquum secundi latus ad aliam quandam rectam, ad quam et reliquum primi latus datam rationem habeat: ipsa quoque parallelogramma ad invicem rationem datam habebunt.

Duorum enim parallelogrammorum A B, E G, circa æquales angulos, aut inæquales quidem, sed tamen datos ad puncta C, F, latera ad invicem ita se habeant, ut



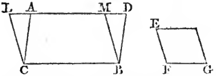
sit quemadmodum C B ad F G, ita recta E F ad rectam C K; sitque ratio ipsius A C ad C K data: dico parallelogrammi A B ad parallelogrammum E G rationem datam esse.

Sit enim primo parallelogrammum A B æquiangulum ipsi E G; atque ita constituatur C K, ut sit in directum ipsi A C, compleaturque parallelogrammum A H. Quoniam vero est ut C B ad F G, ita E F ad C K; æqualia erunt parallelogramma E G, C H [e]. Est vero ut A C ad C K, ita parallelogrammum A B ad parallelogrammum C H [f]. Ratio autem A C ad C K data est [g]. Parallelogrammi igitur A B ad parallelogrammum C H, sive illi æquale E G, ratio data.

[e] 14. sexti.
[f] 1. sexti.
[g] ex hyp.

Non sit autem parallelogrammum A B æquiangulum parallelogrammo E G. Et constituatur ad rectam B C, et ad datum in eâ punctum C, angulo E F G æqualis angulus B C L [h]; compleaturque parallelogrammum C M. Et quoniam datus est uterque angulorum L C B, A C B; reliquus igitur A C L datus est. Angulus autem C A L datus est [i]: quare triangulum A C L specie datum est [k]: adeoque

[h] 23. primi.
[i] ex hyp.
[k] 40. dat.



adeoque ratio ipsius A C ad C L data est. Quapropter si
rectæ A C ad rectam aliquam aliam ratio data sit, ratio
C L ad eandem dabitur[k]. Et quoniam est ut B C ad F G, [k] 8. dat.
ita E F ad eam, ad quam A C habet rationem datam[l]; [l] ex hyp.
est igitur ut B C ad F G, ita F E ad eam, ad quam C L
habet rationem datam. Æqualis autem est angulus [m] Per construct.
B C L angulo E F G[m]: igitur ratio ipsius C M ad E G data
est[n]. Sed ipsi C M æqualis est C D[o]. Ratio igitur ipsius [n] Per part. prior. hujus.
C D ad E G data est. *Q. E. D.* [o] 35. primi.

PROP. LXXIV. [LXXIV.]

Si duo parallelogramma datam rationem habeant, aut in æqualibus angulis, aut inæqualibus quidem, sed tamen datis; erit ut primi latus ad secundi latus, ita alterum secundi latus ad eam, ad quam reliquum primi latus rationem habet datam.

Duo enim parallelogramma A B, E G, aut in æquali- Vide fig. 2. Prop. 73.
bus angulis ad puncta F, C, aut inæqualibus quidem,
sed tamen datis, habeant ad invicem rationem datam:
dico ut C B ad F G ita esse E F ad eam, ad quam ipsa
A C habet rationem datam.

Etenim A B ipsi E G aut æquiangulum est, aut non.
Si æquiangulum sit, res manifesta est ex propositione lvi.

Non sit autem A B ipsi E G æquiangulum. Et con-
stituatur ad rectam C B, et datum in ea punctum C, an-
gulo E F G æqualis angulus L C B[p]; compleaturque pa- [p] 23. primi.
rallelogrammum C M. Quoniam itaque ratio ipsius C D
ad E G data est[q]; est autem C D æquale ipsi C M[r]: ip- [q] ex hyp.
sius igitur C M ad E G data est ratio. Æqualis au- [r] 35. primi.
tem est angulus L C B angulo E F G[s]; ideoque æquian- [s] Per construct.
gulum est C M ipsi E G[t]: ergo ut C B ad F G, ita est [t] Cor. 34. primi.
E F ad eam, ad quam recta L C habet rationem datam[u].
Ratio autem ipsius C A ad C L est data. Nimirum cum [u] Per part. prior. hujus.
triangulum A C L specie datum sit. Id enim ut in præ-
cedente ostendatur. Quapropter si recta L C ad rectam

aliquam rationem datam habeat, ratio C A ad eandem
x 8. dat. data erit [x]. Ergo ut C B ad F G, ita eſt E F ad eam, ad quam recta A C habet rationem datam. *Q. E. D.*

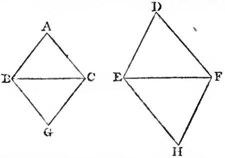
[LXXV.]

PROP. LXXV.

Si duo triangula ad invicem habeant rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem, ſed tamen datis; erit ut primi latus ad ſecundi latus, ita alterum ſecundi latus ad eam rectam, ad quam reliquum primi latus rationem datam habet.

Sint duo triangula A B C, D E F, quæ ad invicem habeant rationem datam; ſintque anguli ad puncta A, D æquales, aut inæquales quidem, ſed tamen dati: dico ut A B ad D E ita eſſe D F ad eam, ad quam recta A C habet rationem datam.

Compleantur enim parallelogramma A G, D H. Et quoniam ratio trianguli A B C ad triangulum D E F data eſt: igitur parallelogrammi A G ad parallelogrammum



y 41. primi. D H ratio eſt data [y]. Quoniam igitur duo ſunt parallelogramma habentia ad invicem rationem datam, aut in angulis æqualibus, aut inæqualibus quidem, ſed tamen datis: eſt igitur ut A B ad D E, ita D F ad eam, ad quam
z 74. dat. recta A C habet rationem datam [z]. *Q. E. D.*

[LXXVI.]

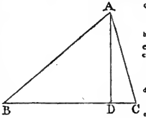
PROP. LXXVI.

Si a trianguli ſpecie dati vertice recta perpendicularis agatur ad baſim; acta recta habebit ad baſim rationem datam.

Sit triangulum A B C ſpecie datum, et agatur a puncto A in baſim B C perpendicularis A D: dico rationem ipſius A D ad B C datam eſſe.

Quoniam

Quoniam enim datur triangulum A B C ſpecie; angulus igitur A B D datus eſt [a]. Angulus autem B D A datus eſt: quare et reliquus B A D datus eſt [b]: ergo triangulum A B D ſpecie datum eſt [c]: quare ratio ipſius B A ad A D data eſt [a]. Eſt autem et ratio ipſius A B ad B C data [d]. Igitur ratio ipſius A D ad B C data eſt [e]. *Q. E. D.*



[a] Def. 3. dat.

[b] 32. primi, et 4. dat.

[c] 40. dat.

[d] ex hyp.

[e] 8. dat.

Cor. * Si a vertice trianguli ſpecie dati recta in baſin deducatur in angulo dato, deducta ad baſin rationem datam habebit.

PROP. LXXVII. [LXXVII.]

Si duæ figuræ ſpecie datæ ad invicem habeant rationem datam; quodlibet etiam latus unius harum figurarum ad quodlibet latus alterius rationem datam habebit.

Ipſa eſt Propoſitio liv. quam vide.

PROP. LXXVIII. [LXXVIII.]

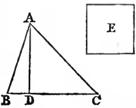
Si data figura habeat ad aliquod rectangulum rationem datam, atque habeat etiam unum latus ad unum latus rationem datam; rectangulum ipſum ſpecie datum eſt.

Patet ex Prop. lxii. cujus eſt pars.

PROP. LXXIX. [LXXIX.]

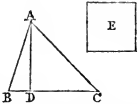
Si triangulum habeat angulum datum, recta autem a dato angulo in latus oppoſitum ad perpendiculum deducta ad latus illud oppoſitum datam rationem habeat, triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

Trianguli A B C angulus B A C detur. Et ab A in latus oppoſitum B C ad perpendiculum deducta A D habeat ad B C rationem datam. Dico triangulum B A C ſpecie datum eſſe. Propter angulum B A C datum, ſpatium quo quadratum ex B A, A C tanquam unâ rectâ ſuperat quadratum ex B C ad triangulum B A C datam ra-



 tionem

f 67. dat. tionem habet[f]. Sit ſpatium illud E. Spatium igitur E ad triangulum A B C rationem habet datam. Sed propter datam rationem rectæ B C ad rectam A D ratio quadrati ex B C ad rectangulum
g 1. ſexti. B C × A D data eſt[g]. Trianguli autem B A C ad rectangulum B C × A D ratio
h 41. primi. data[h]. Quadrati igitur ex
i 8. dat. B C ad triangulum A B C ratio data[i]. Spatii igitur E ad quadratum ex B C ratio data[i]. Spatii igitur ex ſpatio E et quadrato ex B C compoſiti ad quadratum ex B C ratio
k 6. dat. data[k]. Spatium autem ex ſpatio E et quadrato ex B C compoſitum æquale eſt quadrato ex B A C in unam rectam extenſâ. Quadrati igitur ex B A C ad quadratum ex B C ratio data. Rectæ igitur B A C ad rectam B C ratio
l 55. dat. data[l]. Cum vero triangulum B A C angulum ad A datum habeat, latera vero, quæ datum angulum comprehendunt, ſimul ſumpta, ad reliquum latus rationem ha-
m 45. dat. beant datam; triangulum ſpecie datum eſt[m]. *Q. E. D.*

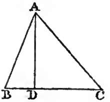


[LXXX.] PROP. LXXX.

Si triangulum unum angulum datum habuerit; quodque ſub lateribus datum angulum comprehendentibus continetur rectangulum, habeat ad quadratum reliqui lateris rationem datam: triangulum ipſum ſpecie datum eſt.

Sit triangulum A B C datum angulum habens ad A; quod autem ſub B A, A C continetur ad quadratum rectæ B C habeat rationem datam: dico triangulum A B C ſpecie datum eſſe.

Ab A in latus B C ad perpendiculum deducatur A D. Propter angulum B A C datum, data eſt ratio trianguli B A C ad rectan-
n 66. dat. gulum B A × A C[n]. Rectanguli igitur B C × A D, quod duplum eſt trianguli, ad rectangulum B A × A C ratio data. Ratio autem rectanguli
o ex hyp. B A × A C ad quadratum ex B C data[o]. Quare et rectanguli B C × A D ad
p 8. dat. quadratum ex B C ratio data[p]. Sed rectangulum B C × A D ad quadratum ex B C rationem
q 1. ſexti. habet, quam A D ad B C[q]. Rectæ igitur A D ad rectam B C



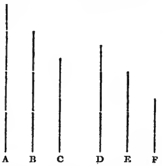
B C ratio data. Triangulum igitur B A C, in quo angulus ad A datus, recta autem ab A in latus oppositum B C ad perpendiculum deducta ad ipsum latus B C rationem datam habet, specie datum est [r]. *Q. E. D.* [r] 79. dat.

PROP. LXXXI. [LXXXI.]

Si sint tres rectæ proportionales, aliæque tres proportionales; priorum autem extremæ ad extremas posteriorum datas habeant rationes (quamvis non easdem): mediæ quoque habebunt rationem datam. Et si extrema ad extremam, et media ad mediam, habeat rationem datam; et reliqua extrema ad reliquam extremam rationem datam habebit.

Tres enim rectæ A, B, C proportionales, tribus rectis proportionalibus D, E, F extremas habeant in ratione datâ; sit nempe ratio ipsius A quidem ad D data, ipsius autem C ad F ratio data: dico ipsius quoque B ad E rationem esse datam.

Quoniam enim ipsius A ad D, ipsiusque C ad F ratio est data: igitur ratio ejus, quod continetur sub A, C, ad id, quod continetur sub D, F, data est [s]. Sed ei, quod continetur sub A, C, æquale est quadratum rectæ B [t]; atque ei, quod sub D, F, æquale est quadratum rectæ E. Ergo ratio quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E data est: ideoque ratio rectæ B ad rectam E data est [u].



[s] 70. dat.
[t] 17. sexti.
[u] 54. dat.

Sit vero rursus ratio ipsius A ad D, ipsiusque B ad E data: dico ipsius quoque C ad F rationem datam esse.

Quoniam enim ratio ipsius B ad E data est; ratio igitur quadrati rectæ B ad quadratum rectæ E data est [x]. Sed quadrato rectæ B æquale est id, quod continetur sub A, C [t]; et quadrato rectæ E æquale est id, quod continetur sub D, F. Igitur ratio ejus, quod continetur sub A, C, ad id, quod continetur sub D, F, data est. Ratio autem unius lateris A ad unum latus D data

[x] 50. dat.

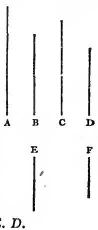
[y] ex hyp. eſt[y]: quare et ratio reliqui lateris C ad reliquum latus
[z] 68. dat. F data eſt[z]. *Q. E. D.*

[LXXXII.]

PROP. LXXXII.

Si quatuor rectæ proportionales fuerint; erit ut prima ad eam, ad quam ſecunda rationem habet datam, ita tertia ad eam, ad quam quarta rationem habet datam.

Sint quatuor rectæ proportionales A, B, C, D, ſitque ut A ad B, ita C ad D: dico ut A ad eam, ad quam B rationem habet datam, ita eſſe C ad eam, ad quam D rationem datam habet.



Sit enim E ea, ad quam B rationem habet datam; fiatque ut B ad E, ita D
[a] 12. ſexti. ad F[a]. Eſt autem ratio ipſius B ad E
[b] ex hyp. data[b]: ergo et ratio ipſius D ad F data eſt. Et quoniam eſt ut A ad B, ita C ad D, et eſt etiam ut B ad E, ita D ad
[c] Per conſtruct. F[c]: erit igitur ex æquo ut A ad E, ita
[d] 22. quinti. C ad F[d]. Et eſt E quidem ea, ad quam B rationem habet datam[b]; atque F ea, ad quam D rationem habet datam. Quare ut A ad eam, ad quam B rationem habet datam, ita eſt C ad eam, ad quam D rationem habet datam. *Q. E. D.*

[LXXXIII.]

PROP. LXXXIII.

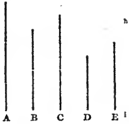
Si quatuor rectæ ita ad invicem ſe habeant, ut tribus ex iis quibuſcunque ſumptis, et quartâ ipſis utcunque acceptâ ad quam reliqua e quatuor rectis rationem habet datam, proportionales ſint quatuor rectæ; erit ut quarta ad tertiam, ita ſecundaad eam, ad quam prima habet rationem datam.

Sint quatuor rectæ A, B, C, D, ita ſe habentes ad invicem, ut tribus ex iis quibuſcunque ſumptis A, B, C, et quartâ ipſis utcunque acceptâ, quæ ſit E, ad quam D rationem habet datam, proportionales ſint rectæ A, B, C, E: dico ut D ad C, ita eſſe B ad eam, ad quam A habet rationem datam.

[e] ex hyp. Quoniam enim eſt ut A ad B, ita C ad E[e]; igitur quod continetur ſub A, E æquale eſt ei, quod continetur ſub

B, C.

B C[f]. Quoniam vero ratio ipſius E ad D data eſt[g]; igitur ratio ejus, quod continetur ſub A, D, ad id, quod continetur ſub A, E, data eſt[h]. Quod autem continetur ſub A, E æquale eſt contento ſub B, C: quare et ratio ejus, quod continetur ſub A, D, ad id, quod continetur ſub B, C, data eſt. Ergo ut D ad C, ita eſt B ad eam, ad quam A habet rationem datam[l]. *Q. E. D.*



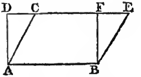
f 16. ſexti.
g ex hyp.
h 1. ſexti.
l 56. dat.

Cor. * Si quatuor ſint rectæ lineæ, rectangulum vero ſub primâ et quartâ ad rectangulum ſub ſecundâ et tertiâ habeat rationem datam; erit quarta ad tertiam, ut ſecunda ad aliam, ad quam prima habet rationem datam.

* LEMMA II.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, rectangulum eiſdem comprehenſum datum eſt.

Rectæ A B, A C datum ſpatium parallelogrammi B A C E comprehendant in angulo B A C dato. Dico rectangulum B A × A C dari. Nam ab A in latus oppoſitum parallelogrammi A E ad perpendiculum deducatur A D. Et parallelogrammum A F compleatur: quod ipſi A E æquale erit[k]. Rectangulum igitur A F magnitudine datum. Sed propter angulum C A B datum[l], rectumque D A B, datus eſt C A D. Datus autem A C D, dato C A B æqualis; et angulus ad D rectus. Triangulum igitur A D C ſpecie datum[m]. Ratio igitur A D ad A C data. Rectanguli igitur A D × A B, id eſt, rectanguli A F, ad rectangulum A C × A B ratio data. Datum autem magnitudine rectangulum A F. Datum igitur A C × A B. *Q. E. D.*



k 35. primi.
l ex hyp.
m 40. dat.

Cor. * Eodem modo oſtendetur, ſi duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, ſpatium, quod in alio dato angulo eædem rectæ comprehendunt, datum eſſe.

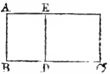
[LXXXIV.]

PROP. LXXXIV.

Si duæ rectæ ſpatium datum comprehendant in angulo dato, ſitque altera alterâ major, datâ, quam in ratione; etiam unaquæque ipſarum data erit.

Duæ enim rectæ A B, B C datum ſpatium A C comprehendant in angulo dato A B C; ſitque C B ipſâ B A major, datâ, quam in ratione: dico unamquamque rectarum A B, B C datam eſſe.

Quoniam enim C B major eſt quam ipſa B A, datâ, quam in ratione; ſit linea data ipſa D C: igitur reliqua D B ad B A datam rationem habet[k]. Compleatur parallelogrammum A D. Et quoniam ratio ipſius A B ad B D data eſt; et angulus A B D datus eſt[l]: idcirco parallelogrammum A D ſpecie datum eſt. Quoniam itaque datum ſpatium A C ad datam rectam D C applicatum eſt, excedens datâ ſpecie figurâ A D: latitudines exceſſûs A B, B D datæ ſunt[m]. Sed et D C data eſt[l]: ergo et tota B C data eſt[n]. Data autem eſt A B. Quare utraque rectarum A B, B C data eſt. *Q. E. D.*



[k] Def. 11. dat.
[l] ex hyp.
[m] 59. dat.
[n] 3. dat.

Aliter. * Duæ rectæ A B, B C datum ſpatium comprehendant in angulo quodam dato. Harum autem A B alterâ B C major ſit, datâ, quam in ratione. Dico



utramque datam. Auferatur data illa, quæ ſit A D. Reliquæ igitur B D ad B C ratio data. Quare et rectanguli A B × B D ad rectangulum A B × B C ratio data. Sed cum ſpatium rectis A B, B C in angulo quodam dato comprehenſum datum ſit; idcirco rectangulum A B × B C datum[o]. Rectangulum igitur A B × B D datum[p]. Media dividatur data A D in E. Datæ igitur dimidia A E, vel E D, data. Quadratum igitur ex datâ E D datum. Datis autem quadrato ex E D rectanguloque A B × B D, eorum ſumma quadratum ex E B datum. Recta igitur E B data. Datarum igitur A E, E B ſumma A B, et datarum E B, E D differentia D B data. Ratio autem D B ad B C data[q]. Data igitur et B C[p]. Utraque igitur A B, B C data. *Q. E. D.*

[o] Lemma 2. * dat.
[p] 2. dat.
[q] ex hyp.

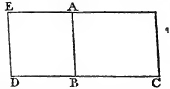
PROP.

PROP. LXXXV. [LXXXV.]

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, duarum autem una cum aliâ quâdam, ad quam altera datam rationem habeat, data sit; earum etiam unaquæque data erit.

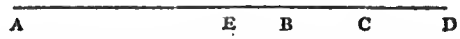
Duæ enim rectæ A B, B C datum spatium A C comprehendant in angulo dato A B C: harum autem una C B cum aliâ quâdam, ad quam altera duarum A B datam rationem habeat, data sit: dico unamquamque rectarum A B, B C datam esse.

Producatur enim C B, et in productâ sumatur D B æqualis illi, ad quam A B datam rationem habet. Tota igitur C D data [q]. Per punctum D ipsi B A parallela agatur D E, compleaturque A D. Quoniam igitur ratio ipsius D B ad B A data, atque datus est angulus A B D; nam qui est ipsi deinceps datus est [q]; parallelogrammum igitur E B specie datum est. Quoniam itaque ad datam rectam D C datum spatium A C applicatum est, deficiens datâ specie figurâ E B: igitur latitudines defectûs datæ sunt [r]: quare rectæ A B, B D datæ sunt. At vero D C data est [q]. Unaquæque igitur rectarum A B, B C data est [s]. *Q.E.D.*



[q] ex hyp.
[r] 58. dat.
[s] 4. dat.

Aliter.* Duæ rectæ A B, B C datum spatium comprehendant in angulo quodam dato. Harum autem una A B cum aliâ quâdam ad quam altera B C datam



rationem habeat, data sit. Dico utramque datam. Rectæ enim A B adjiciatur B D æqualis illi, ad quam B C datam rationem habet. Tota igitur A D data. Sed propter rationem rectæ B D ad B C datam, rectanguli quoque A B × B D ad rectangulum A B × B C ratio data. Datum autem rectangulum A B × B C, ut in præcedente. Rectangulum igitur A B × B D datum. Media dividatur data A D in E. Datæ igitur dimidia E A, vel E D, data, et quadratum ex datâ E D datum. Datis autem quadrato ex E D, rectanguloque A B × B D, data est eorum differentia;

differentia; hoc eſt, quadratum ex E B datum. Recta igitur E B data. Datarum igitur A E, E B ſumma A B, et datarum E D, E B differentia B D, data. Ratio autem B D ad B C data. Data igitur et B C. Utraque igitur A B et B C data. *Q. E. D.*

* SCHOLION.

Quæ in libris antehac editis quartæ et quintæ ab octogeſimâ propoſitiones locum occupârunt, duarum quæ a nobis poſitæ ſunt, vel reſtitutæ potius, generalium, quas Euclidis veras et integras fuiſſe nobis perſuaſiſſimum eſt, caſum utriuſque ſingularem tantum in ſe quæque habet, et maxime obvium: quando ſcilicet ratio data æqualium eſt. Has autem, quamquam in generalibus noſtris contineantur, ſpeciatim quoque in Cor. 2. Prop. 59. enunciatas dedimus, utpote quarum veritas ex propoſitione illâ cum proxime præcedente ſatis eluceſcit.

[LXXXVII.]

PROP. LXXXVI.

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, poſſit autem altera alterâ majus, dato; et earum utraque data erit.

Duæ enim rectæ A B, B C datum ſpatium A C comprehendant in angulo dato A B C; quadratum autem rectæ A B quadrato rectæ B C majus ſit, dato: dico utramque ipſarum A B, B C datam eſſe.

Quoniam enim quadratum rectæ A B quadrato rectæ B C majus eſt, dato; auferatur datum, ſitque id, quod continetur ſub A B, B D; ergo reliquum, quod ſc. continetur ſub B A, A D, æquale eſt quadrato rectæ B C [h]. Quoniam vero id, quod continetur ſub A B, B C,



necnon id, quod continetur ſub A B, B D, datum eſt: ratio igitur ejus, quod continetur ſub A B, B D, ad id, quod continetur ſub A B, B C, data eſt [i]. Atqui ut rectangulum ſub A B, B D ad rectangulum ſub A B, B C, ita eſt D B ad B C: ergo datur ratio rectæ D B ad rectam E C; adeoque ratio quadrati rectæ D B ad quadratum rectæ B C data eſt [k]. Quadrato autem rectæ B C æquale eſt rectangulum ſub B A, A D [l]: igitur ratio rectan-

h 2. ſecundi.
i 1. dat.
k 50. dat.
l Per conſtruct. et 2. ſecundi.

rectanguli sub B A, A D ad quadratum rectæ D B data est: ideoque et ratio ejus, quod quater continetur sub B A, A D, ad quadratum rectæ D B data est[k]: quare et componendo [k] 8. dat.
ratio ejus, quod quater continetur sub B A, A D, una cum quadrato rectæ D B ad quadratum rectæ D B data est[l]. [l] 6. dat.
Sed id, quod quater continetur sub B A, A D, una cum quadrato rectæ D B est quadratum utriusque simul B A, A D[m]: igitur ratio quadrati utriusque simul B A, A D ad [m] 8. secundi.
quadratum rectæ D B data est: quare et ratio utriusque simul B A, A D ad D B data est[n]. Atque componendo [n] 54. dat.
ratio utriusque simul B A, A D et ipsius B D, hoc est, duplæ A B ad B D data est[o]: ergo et ratio A B ad B D data [o] 6. dat.
est. At vero ratio D B ad B C data est: ergo et ratio ipsius A B ad B C data est[p]. Sed datus est angulus A B C. [p] 8. dat.
Parallelogrammum igitur A C specie datum. Sed et magnitudine[q]. Latera igitur A B, B C data sunt magni- [q] ex hyp.
tudine[r]. *Q. E. D.* [r] 55. dat.

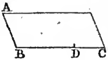
PROP. LXXXVII. [LXXXVI.]

Si duæ rectæ datum spatium comprehendant in angulo dato, possit autem altera alterâ majus, dato, quam in ratione; et utraque ipsarum data erit.

Duæ enim rectæ A B, B C datum spatium A C comprehendant in angulo dato A B C; quadratum autem rectæ B C quadrato rectæ A B majus sit, dato, quam in ratione: dico utramque rectarum A B, B C datam esse.

Quoniam enim quadratum rectæ C B quadrato rectæ B A majus est, dato, quam in ratione; auferatur datum, sitque id, quod continetur sub C B, B D: ergo ratio reliqui, quod nempe continetur sub B C, C D, ad quadratum rectæ A B data est[t]. Quoniam vero datum est id, quod continetur sub A B, B C, atque etiam illud, quod continetur sub C B, B D, datum: ratio igitur ejus, quod continetur sub A B, B C, ad id, quod continetur sub C B, B D data est[u]. Ut autem id, quod continetur sub A B, B C, ad id, quod continetur sub C B, B D, ita est A B ad B D[x]: quare ratio rectæ A B ad rectam B D data est: ideoque ratio quadrati rectæ A B ad quadratum rectæ B D data est[y]. Datur autem ratio ejus, quod continetur sub B C, C D, ad quadratum rectæ A B: ergo et ratio ejus, quod continetur

[t] Def. 11. dat.

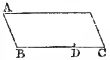


[u] 1. dat.

[x] 1. sexti.

[y] 50. dat.

[z] 8. dat. netur ſub B C, C D, ad quadratum rectæ B D data eſt[z]. Quare ratio ejus, quod quater continetur ſub B C, C D, ad quadratum rectæ B D data eſt[z]; ideoque et ratio ejus, quod quater continetur ſub B C, C D, una cum quadrato rectæ B D ad quadratum rectæ B D data eſt[a]. Sed



[a] 6. dat. id, quod quater continetur ſub B C, C D, una cum quadrato rectæ B D eſt quadratum utriuſque ſimul B C, C D[b]: ratio igitur quadrati utriuſque ſimul B C, C D ad quadratum rectæ B D data eſt. Quare et ratio utriuſque ſimul B C, C D ad B D data eſt[c]: ergo et componendo ratio rectarum B C, C D, B D ſimul, id eſt, duplæ C B, ad B D data eſt[a]: quare et ratio ipſius C B ad B D data eſt. Data autem eſt ratio B D ad B A[d]. Ratio igitur B C ad B A data[z]. Angulus vero C B A datus[e]. Parallelogrammum igitur C A ſpecie datum[f]. Sed et magnitudine[e]. Ergo latera C B, B A magnitudine data ſunt[c]. *Q. E. D.*

[b] 8. ſecundi. [c] 54. dat. [d] Id enim oſtenſum eſt. [e] ex hyp. [f] Def. 3. dat.

* SCHOLION.

Viſum eſt ſubjungere Theoremata duo haud prætereunda, Davidis Gregorii alterum, alterum Simſoni.

* THEOREMA I. (Gregorii.)

Si duæ rectæ datum ſpatium comprehendant in angulo dato, et earum quadrata ſimul ſumpta æqualia ſint ſpatio dato; utraque data erit.

Rectæ A B, A C datum ſpatium parallelogrammi B C in angulo dato B A C comprehendant. Quadrata autem ex A B, A C ſimul ſumpta dato ſpatio æqualia ſunto. Dico utramque A B, A C dari. Propter angulum ad A datum, et datum parallelogrammum B C;



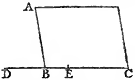
[g] Lemma 2. * dat. rectangulum B A × A C datum eſt[g]. Ac proinde bis rectangulum B A × A C datum. Sed datur quadratorum
[h] ex hyp. ex B A, A C ſumma[h]. Data igitur ſumma quadratorum
[i] 3. dat. ex A B, A C una cum bis rectangulo B A × A C[i]. Sed quadrata illa cum bis rectangulo conficiunt quadratum
[k] 4. ſecund. ex B A, A C, tanquam unâ rectâ[k]. Quadratum igitur ex
[l] 54. dat. B A C datum. Recta igitur B A C data[l]. Cum vero rectæ

rectæ A B, A C datum ſpatium comprehendant in angulo dato, et duarum ſumma data ſit, dabitur utraque [n]. *Q. E. D.* [n] Cor. 59. dat. Vide Addenda.

THEOREMA II. (Simſoni.)

Si duæ rectæ ſpatium datum comprehendant in angulo dato, unius autem quadratum cum ſpatio, ad quod quadratum alterius datam rationem habeat, datum ſit; utraque earum data erit.

Duæ rectæ A B, B C ſpatium datum A C comprehendant, in angulo A B C dato. Quadratum autem ex B C, una cum ſpatio, ad quod quadratum ex A B datam rationem habeat, detur. Dico datam eſſe utramque A B, B C.



In C B enim productâ capiatur B D eâ longitudine, ut rectangulum ſub D B, B C illud ipſum ſit, ad quod quadratum ex A B datam rationem habet. Rectangulum igitur D C × C B datum [o]. [o] ex hyp. Nimirum cum quadrato ex B C una cum rectangulo D B × B C æquale ſit [p]. [p] 3. ſecundi. Dato autem angulo A B C, ſpatioque A C dato, datum eſt rectangulum A B × B C [q]. [q] Lemma 2. * dat. Dati igitur D C × C B ad datum A B × B C ratio data [r]. [r] 1. dat. Ratio igitur D C ad A B data [s]. [s] 1. ſexti. Quare et quadrati ex D C ad quadratum ex A B ratio data [t]. [t] 50. dat. Quadrati autem ex A B ad rectangulum D B × B C ratio data [o]. Quadrati igitur ex D C ad rectangulum D B × B C ratio data [u]. [u] 8. dat. Media dividatur recta D C in E. Quadrati igitur ex E D ad quadratum ex D C ratio data, unitatis ſcilicet ad quaternarium. Ratio igitur quadrati ex E D ad rectangulum D B × B C data [u]. Unde convertendo ratio quadrati ex E D ad quadratum ex E B data [x]. [x] 5. ſecundi, et 5. dat. Rectæ igitur E D ad rectam E B ratio data [y]. [y] 54. dat. Et convertendo rectæ E D ad D B ratio data [z]. [z] 5. dat. Quare et duplæ E B, ſive D C, ad D B ratio data [u]. Et rurſum convertendo ratio D C ad C B data [z]. Rectangulum igitur D C × C B ſpecie datum [a]. [a] Def. 3. dat. Sed magnitudine etiam datum, ex prius oſtenſis. Latera igitur D C, C B magnitudine data. Data autem ratio D C ad A B, id enim oſtenſum. Quare et A B magnitudine data. Utraque igitur A B, B C magnitudine data, *Q. E. D.*

Longe

Longe alia eſt quam hujuſce propoſitionis, in Datis ſuis nonageſimæ, Simſonus demonſtrationem dedit; elegantiſſimam ſane illam, et luculentam; ſed ad earum exemplar, quas in eâdem materiâ Euclides ipſe adhibuit, minus diligenter compoſitam. Nobis Euclidem ſequi placuit.

Cæterum per Propoſitiones quatuor haſce, Euclidis duas, 86^{am} et 87^{am}, cum duabus aliis hujus Scholii reſolvuntur æquationes biquadraticæ cujuſcunque formæ, quæ vacua ſit terminis imparibus.

Etenim in diagrammate Propoſitionis $86æ$, datum rectangulum $AB \times BC$ ſit d^2. Datum autem illud, quo quadratum ex AB exuperat quadratum ex BC, ſit a^2. Et AB dicatur x. Erit igitur $BC^2 = x^2 - a^2$. Et $AB \times BC$ erit $\sqrt{x^2 - a^2} \times x$. Quare $\sqrt{x^2 - a^2} \times x = d^2$, et $x^4 - a^2x^2 = d^4$. Quæ eſt æquatio biquadratica, cujus radices ſunt AB, BC.

In diagrammate $87æ$ datum rectangulum $AB \times BC$ ſit d^2. Datum illud, quo quadratum ex BC majus eſt quadrato ex AB, quam in ratione, ſit a^2, et data ratio ea ſit, quam a habet ad b. Tum ſi BC dicatur x, cum ſit $BC^2 - a^2 : AB^2 = a : b$, hoc eſt, $x^2 - a^2 : AB^2 = a : b$; crit $AB^2 = \frac{b}{a} x^2 - b a$, et $\frac{b}{a} x^4 - b a x^2$ $(= AB^2 \times BC^2)$ $= d^4$. Quare $x^4 - a^2 x^2 = \frac{a}{b} d^4$, quæ eſt æquatio biquadratica, cujus radices ſunt BC, et recta, cujus quadratum ad quadratum ex AB datam rationem habet.

Rurſus in diagrammate Propoſitionis $1æ$ Scholii, $AB \times BC$ ſit d^2. Spatium datum, cui æqualia ſunt quadrata ex AB, BC ſimul ſumpta, ſit a^2. Et AB dicatur x. Itaque $x^2 + BC^2 = a^2$. Et $BC^2 = a^2 - x^2$. Quare $a^2x^2 - x^4$ $(= AB^2 \times BC^2) = d^4$. Quæ eſt æquatio biquadratica, cujus radices ſunt AB, BC.

Denique in diagrammate Propoſitionis $2æ$ Scholii, $AB \times BC$ ſit d^2. Datum ſpatium, cui æquale eſt quadratum ex BC, una cum illo, ad quod quadratum ex AB datam rationem habet, ſit a^2. Dataque ratio ea ſit, quam b habet ad a. Itaque erit $BC^2 + \frac{a}{b} AB^2 = a^2$. Vel ſi BC dicatur x, erit $x^2 + \frac{a}{b} AB^2 = a^2$. Unde $AB^2 = b a$.

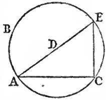
$= ba - \frac{b}{a} x^2$. Quare $b a x^2 - \frac{b}{a} x^4 = AB^2 \times BC^2$ $= d^4$, et $a^2 x^2 - x^4 = \frac{a}{b} d^4$. Quæ eſt æquatio biquadratica, cujus radices ſunt B C, et recta, cujus quadratum ad quadratum ex A B datam rationem habet.

PROP. LXXXVIII. [LXXXVIII.]

Si in circulum magnitudine datum acta ſit recta linea, ſegmentum auferens, quod angulum datum comprehendat; acta recta magnitudine data eſt.

In circulum enim magnitudine datum A B C agatur recta linea A C, auferens ſegmentum A E C, quod comprehendat angulum datum A E C: dico rectam A C magnitudine datam eſſe.

Sumatur enim circuli centrum D [b], et connexa recta [b: 1. tertii.] A D producatur ad punctum E, atque connectatur C E. Datus igitur eſt angulus A C E; etenim rectus eſt [c: 31. tertii.]. Angulus quoque A E C datus eſt [d: ex hyp.]: quare et reliquus angulus C A E datus eſt [e: 32. primi, et 4. dat.]. Triangulum igitur A C E ſpecie datum eſt [f: 40. dat.]; adeoque ratio ipſius E A ad A C data eſt [g: Def. 3. dat.]. Eſt autem E A magnitudine data [h: Def. 5. dat.]; quia datur circulus magnitudine. Ergo et ipſa A C magnitudine data eſt [i: 2. dat.]. *Q. E. D.*



PROP. LXXXIX. [LXXXIX.]

Si in datum magnitudine circulum data magnitudine recta acta fuerit; auferet ſegmentum, quod angulum datum comprehendet.

In circulum enim magnitudine datum A B C agatur recta magnitudine data A C: dico quod auferet ſegmentum, quod angulum datum comprehendet. Vide fig. Prop. 88.

Accipiatur enim circuli centrum D [k], et connexa recta [k: 1. tertii.] A D producatur ad punctum E, connectaturque C E. Et quoniam data eſt utraque rectarum E A, A C: igitur ratio ipſius E A ad A C data eſt [l: 1. dat.]. Rectus autem eſt angulus A C E [m: 31. tertii.]: quare triangulum A C E ſpecie datum eſt [n: 44. dat.]. Angulus igitur A E C datus eſt [o: Def. 3. dat.]. *Q. E. D.*

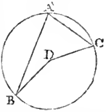
PROP.

[XC.] PROP. XC.

Si in circuli positione dati circumferentiâ acceptum fuerit datum punctum, ab eo autem puncto ad circumferentiam circuli inflexa fuerit recta linea, quæ datum angulum efficiat; inflexæ rectæ altera extremitas data est.

In circuli enim positione dati A B C circumferentiâ accipiatur punctum datum B, atque a puncto B inflectatur recta B A C, quæ faciat angulum B A C datum: dico punctum C datum esse.

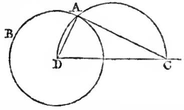
Accipiatur enim circuli centrum D, et connectantur
p 1. tertii. B D, D C[p]. Et quoniam datum est utrumque punctorum B, D: igitur
q 26. dat. positione data est B D[q]. Et quoniam datus est angulus B A C: angulus
r 20. tertii, et 2. dat. igitur B D C datus quoque est[r]. Quoniam itaque ad datam positione rectam B D, et datum in eâ punctum D, recta D C acta est, quæ facit angulum B D C datum: recta igitur D C
s 29. dat. positione data est[s]. Circulus autem A B C positione et magnitudine datus est: quare positione et magnitudine
t 25. et 26. dat. data est D C[t]. Datum autem est punctum D. Ergo punctum C datum est[u]. *Q. E. D.*
u 27. dat.



[XCI.] PROP. XCI.

Si a dato puncto recta linea acta fuerit, quæ datum positione circulum contingat; acta recta positione et magnitudine data est.

A dato enim puncto C datum positione circulum A B contingens recta C A ducatur: dico positione et magnitudine datam esse rectam C A.



x 1. tertii. Sumatur enim circuli centrum D[x], et connectantur rectæ D A, D C. Et quoniam utrumque punctorum D, C datum est: recta igitur D C positione et magnitudine

tudine data eft [y]. Et rectus eft angulus D A C [z]: ergo [y] 26. dat.
fuper D C defcriptus femicirculus tranfibit per punctum [z] 18. tertii.
A [a]. Tranfeat, fitque D A C: ergo pofitione datus eft [a] 31. tertii.
circulus D A C [b]. Eft autem circulus A B pofitione datus [c]: [b] Def. 6. dat.
quare punctum A datum eft [d]. Sed et punctum C datum [c] ex hyp.
eft [e]. Recta igitur A C pofitione et magnitudine data [d] 25. dat.
eft [y]. *Q. E. D.*

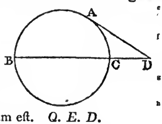
PROP. XCII. [XCII.]

Si extra circulum pofitione datum accipiatur aliquod punctum, a dato † autem puncto in circulum ducatur recta; rectangulum fub ducta linea et ea, quæ inter punctum et convexam peripheriam interjicitur, datum erit.

Extra enim datum pofitione circulum A B C accipiatur aliquod punctum D; a puncto autem D agatur recta D B fecans circulum: dico rectangulum fub B D, D C datum effe.

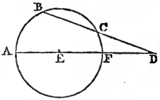
Agatur enim a puncto D circulum A B C contingens recta D A [e]: recta igitur D A pofitione et magnitudine data eft [f]. Quoniam itaque data eft A D: etiam quadratum rectæ A D datum eft [g]. Et æquale quidem eft ei, quod continetur fub B D, D C [h]. Quare et id, quod continetur fub B D, D C, datum eft. *Q. E. D.*

[e] 17. tertii. [f] 91. dat. [g] 52. dat. [h] 36. tertii.



Aliter. Accipiatur circuli centrum E [i]; et jungatur D E, et producatur ad punctum A. Et quoniam datum eft utrumque punctorum E, D [k]: recta igitur E D pofitione et magnitudine data eft [l]. Circulus autem A B F datus eft magnitudine et pofitione [k]: utrumque igitur punctorum A, F datum eft [m]. Datum autem eft punctum D [k]: utraque igitur rectarum A D, F D data eft [l]: quare quod continetur fub A D, D F datum eft. Et id quod continetur fub A D, D F æquale

[i] 1. tertii. [k] ex hyp. [l] 26. dat. [m] 25. dat.



† *Nimirum punctum femel acceptum, etfi pro arbitrio acceptum fuerit, pro dato tamen habendum eft.*

eft

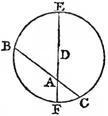
n Cor. 1. 36. tertii. est ei, quod continetur sub B D, D C [n]. Ergo et id, quod continetur sub B D, D C, datum est. *Q. E. D.*

[XCIII.] PROP. XCIII.

Si intra datum positione circulum sumatur aliquod punctum, per punctum autem illud agatur in circulum recta aliqua linea; quod sub segmentis actæ rectæ lineæ comprehenditur rectangulum, datum erit.

Etenim intra circulum positione datum B C sumatur aliquod punctum A; per punctum autem datum A agatur quævis recta C B: dico rectangulum sub B A, A C datum esse.

o 1. tertii. Accipiatur enim circuli centrum D [o], et connexa recta A D producatur ad puncta F, E.



p ex hyp. q 26. dat. r 25. dat. Itaque quoniam datum est utrumque punctorum D, A [p]: igitur positione data est recta D A [q]. Est autem et circulus C B F positione datus [p]: utrumque igitur punctorum F, E datum est [r]. Punctum autem A datum est [p]: ergo utraque rectarum F A, A E data est [q]: ideoque rectangulumn sub F A, A E datum

s 35. tertii. est. Et est æquale rectangulo sub B A, A C [s]. Igitur rectangulum sub B A, A C datum est. *Q. E. D.*

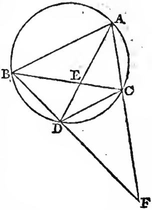
[XCIV.] PROP. XCIV.

Si in circulum agatur recta linea, segmentum auferens quod angulum datum comprehendat, angulus autem qui in segmento consistit bifariam secetur; quæ rectis duabus circa datum angulum, simul sumptis, æqualis est recta linea ad rectam, quæ angulum bifariam secat, habebit rationem datam. Et circulo magnitudine dato rectangulum sub utrisque simul, quæ datum angulum comprehendunt, rectis, et inferne abscissá ab eá, quæ angulum in circumferentiá datum bifariam secat, datum erit.

In circulum enim A B C agatur recta B C, segmentum auferens quod datum angulum B A C comprehendat, et secetur angulus B A C bifariam rectâ A D: dico rationem rectæ, quæ duabus B A, A C simul sumptis æqualis est, ad A D datam esse; necnon, circulo magnitudine dato, datum esse id, quod sub utrâque simul B A C et rectâ E D continetur.

Produ-

Producatur A C ad punctum F, et fiat C F æqualis ipsi B A, connectanturque B D, D C, D F. Et quoniam æqualis est B A ipsi C F, atque D B ipsi D C[t]; idcirco duæ A B, B D duabus F C, C D æquales sunt, utraque utrique. Atqui angulus etiam A B D angulo D C F æqualis est, quia quadrilaterum A B D C est in circulo[u]: basis igitur A D basi D F æqualis est, et triangulum A B D triangulo C D F æquale[x], et reliqui anguli reliquis angulis æquales, sub quibus æqualia latera subtenduntur; adeoque angulus B A D angulo



[t] 26. et 29. tertii.
[u] 13. primi, et 22. tertii.
[x] 4. primi.

D F C æqualis est. Angulus autem B A D datus est[y]: [y] ex hyp.
quare angulus D F C datus est. Sed et angulus D A F
datus est: triangulum igitur A D F specie datum est[z]: [z] 40. dat.
adeoque data est ratio ipsius F A ad A D[a]. Est autem [a] Def. 3. dat.
A F duabus B A, A C simul sumptis æqualis; quia æqualis est C F ipsi B A[b]. Ratio igitur utriusque simul B A, [b] Per construct.
A C ad A D data est. *Q. E. D.*

Dico insuper circulo magnitudine dato rectangulum sub B A C et D E dari. Propter angulos A C E, B D E inter se æquales[c], æquales item A E C, B E D; similia [c] 21. tertii.
sunt triangula A E C, B E D. Quapropter A C est ad C E, ut B D ad D E. Rursum propter A B E, E D C inter se æquales[c], necnon æquales A E B, D E C, similia sunt triangula E D C, E B A. Quapropter A B est ad B E, ut D C ad D E. Jam vero cum sit A C ad C E, ut D B ad D E; et A B ad B E, ut D C, vel illi æqualis D B, ad D E: erunt A B, A C simul ad C E, B E simul, id est, erit tota B A C ad totam B C ut B D ad D E[d]. Rectangulum igitur [d] 12. quinti.
B A C × D E rectangulo B C × B D æquale. Circulo autem magnitudine dato, rectæ inscriptæ B C, B D, cum utraque segmentum auferat quod datum comprehendit angulum, magnitudine singulatim datæ sunt[e]. Rectangulum igitur B C × B D magnitudine datum. Quare [e] 88. dat.
et illi æquale B A C × D E. *Q. E. D.*

 Cor.

Cor. * Si trianguli angulus datus ſit, latera vero circa datum angulum ſimul ſumpta æqualia ſint rectæ magnitudine datæ; circulo triangulum circumſcribenti inſcripta recta quæ datum angulum medium dividat, magnitudine data eſt.

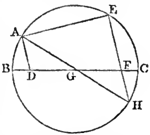
[f] Per hanc Prop. [g] 2. dat. Ratio enim B A C ad A D data[f]. Quapropter ſi magnitudine detur B A C, dabitur et A D[g]. *Q. E. D.*

[XCV.] PROP. XCV.

Si in circuli poſitione dati diametro ſumatur punctum, a puncto autem illo in circulum producatur quædam recta, agaturque recta a ſectione ad rectos angulos in productam rectam; per punctum autem, in quo linea, quæ ad rectos angulos inſiſtit, occurrit circumferentiæ circuli, agatur parallela productæ rectæ: datum eſt illud punctum, in quo parallela occurrit ipſi diametro; et quod ſub parallelis lineis comprehenditur rectangulum datum eſt.

In circuli enim poſitione dati A B C diametro B C accipiatur punctum D, per punctum autem datum D producatur in circulum recta quædam linea D A, a puncto autem A ipſi D A ad angulos rectos agatur recta A E, atque per punctum E ipſi A D parallela agatur E F: dico punctum F datum eſſe; atque etiam datum eſſe rectangulum ſub A D, E F comprehenſum.

Producatur enim recta E F ad punctum H, et connectatur recta A H. Quoniam angulus H E A rectus eſt; recta H A eſt circuli A B C diameter[h]. Eſt autem et B C diameter circuli A B C[i]: ergo punctum G circuli A B C centrum eſt: quare datum eſt punctum G. Eſt autem punctum D datum[l]: ergo data eſt recta D G magnitudine[k]. Et quoniam recta A D parallela eſt ipſi E H[l], atque eſt H G ipſi G A æqualis: igitur æqualis eſt D G quidem ipſi G F, et A D ipſi F H[l]. Eſt autem recta D G data: ergo etiam data eſt G F. Sed et etiam poſitione datæ ſunt: ergo utraque rectarum G F, G D data eſt. Atque datum eſt punctum G: quare et punctum F datum eſt[m].



[h] 31. tertii.
[i] ex hyp.
[k] 26. dat.
[l] 29. primi, et 4. ſexti.
[m] 27. dat.

Et

Et quoniam intra circulum poſitione datum A B C acceptum eſt datum punctum F, et acta eſt recta E F H; rectangulum igitur ſub E F, F H datum eſt [n]. Æqualis autem eſt H F ipſi D A. Ergo rectangulum ſub A D, E F datum eſt. [n] 93. dat.

ADDITAMENTUM

LIBRI DATORUM EUCLIDIS;

SIVE

LIBER DATORUM SECUNDUS.

CONCINNAVIT ET ADJECIT

SAMUEL, EPISCOPUS ASAPHENSIS.

ADDITAMENTUM

LIBRI DATORUM.

DEFINITIONES.

DEFINITIO I.

CIRCULI ſegmentum, in quo datus eſt angulus, ſpecie dari dicitur.

II.

Arcus circuli ſpecie datus eſt, qui angulum datum ſive ad centrum ſive ad peripheriam ſubtendit.

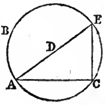
Cor. 1. Segmenti ſpecie dati peripheria arcus eſt ſpecie datus.

Cor. 2. Si arcui ſpecie dato addatur vel auferatur arcus ſpecie datus, qui ex duobus componitur arcus, vel qui relinquitur, ſpecie datus eſt.

PROPOSITIO I.

Si circulo inſcribatur recta, quæ ad diametrum datam rationem habeat, auferet illa ſegmentum ſpecie datum; et ſi inſcripta auferat ſegmentum ſpecie datum, habebit illa ad diametrum rationem datam.

Circulo ABC inſcribatur AC, quæ ad diametrum AE datam rationem habeat. Dico ſegmentum ABEC ſpecie datum. Jungatur enim EC. In triangulo AEC, angulus ACE rectus eſt[a]. Lateris autem AC ad latus AE ratio data[b]. Triangulum igitur AEC ſpecie datum[c]. Angulus igitur AEC datus[d]. Segmentum igitur ABEC ſpecie datum[e]. *Q. E. D.*



[a] 31. tertii.
[b] ex hyp.
[c] 44. dat.
[d] Def. 3. dat.
[e] Def. 1. hujus.

PROP.

Jam vero inſcripta A C auferat ſegmentum A B E C ſpecie datum. Dico rationem inſcriptæ A C ad diametrum A E dari. Manentibus enim conſtructis, propter
[f] Def. 1. hujus. ſegmentum A B E C ſpecie datum, angulus A E C datus[f]. Angulus autem A C E datus, nempe cum ſit rectus[g].
[g] 31. tertii. Quare et reliquus angulus trianguli A E C, angulus utique E A C, datus. Triangulum igitur A E C ſpecie
[h] 40. dat. [i] Def. 3. dat. datum[h]. Ratio igitur A C ad A E data[i]. *Q. E. D.*

PROP. II.

Si duæ rectæ circulo inſcriptæ ſegmenta auferant ſpecie data; inſcriptæ datam inter ſe rationem habent.

[k] Per præc. Utriuſque enim ad diametrum ratio data[k]. Mutua
[l] 8. dat. igitur earum inter ſe ratio data[l]. *Q. E. D.*

PROP. III.

Baſis ſegmenti circularis ſpecie dati angulum cum diametro, per terminum ſuum alterutrum tranſeunte, datum facit. Et ſi baſis ſegmenti circularis angulum cum diametro, per terminum ſuum tranſeunte, datum faciat, ſegmentum ſpecie datum eſt.

Nam, in fig. Prop. 1. hujus, propter ſegmentum
[m] Def. 1. hujus. A B E C ſpecie datum, angulus A E C datus[m]. Sed rectus A C E. Quare trianguli A C E angulus reliquus E A C datus; quem utique baſis ſegmenti cum diametro A E, per terminum ſuum A tranſeunte, facit. *Q. E. D.*

E contrario, dato angulo C A E, dabitur in triangulo A C E, ad C rectangulo, angulorum tertius A E C. Segmentum igitur A B E C ſpecie datum. *Q. E. D.*

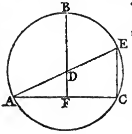
PROP. IV.

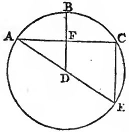
Segmenti circularis ſpecie dati baſis ad altitudinem rationem datam habet.

Eſto circuli ſegmentum A B C, ſpecie datum, baſi A C conſtitutum. A centro circuli, quod ſit D, in ſegmenti baſin A C ad perpendiculum deducatur D F, quæ ipſi A C in puncto F, ſegmenti autem peripheriæ in puncto B occurrat. Erit B F ſegmenti altitudo. Dico rationem A C ad B F dari. Juncta enim A D et producta peripheriæ circuli in E occurrat, et jungatur C E.

Angulus

Angulus ad F rectus[n]. Datus igitur. Angulus autem ad A datus[o]. Quare et tertius trianguli A F D angulus, A D F, datus; et triangulum ipsum specie datum[p]. Jam vero propter segmentum A B C specie datum, ratio A C ad A E data[q]. Ratio autem A E ad A D data, binarii utique ad unitatem. Ratio igitur A C ad A D, sive illi æqualem D B, data[r]. Sed propter triangulum A D F specie datum, ratio A D ad D F data. Ratio igitur A C ad D F data[r]. Segmenti igitur basis A C ad utramque D B, D F datam rationem habet. Quapropter et ad B F eadem A C datam rationem habet[s]. *Q. E. D.*



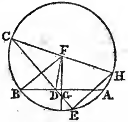


n Per construct.
o Per præc.
p 40. dat.
q 1. hujus.
r 8. dat.
s 22. dat. vel Cor. 22. dat.

PROP. V.

Si recta circulo inscripta segmentum auferens specie datum in datâ ratione secetur; recta, a puncto sectionis in dato angulo educta, segmentum auferet specie datum.

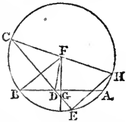
Recta A B, circulo A C B inscripta, auferat segmentum B C A specie datum. Recta A B in datâ ratione secetur in puncto D: et per punctum D ducatur recta C D E, quæ angulum C D B dato æqualem faciat. Dico segmentum C H E specie datum. A centro circuli F in rectam A B ducatur ad perpendiculum recta F G. Jungantur F B, F D, et F C. Producta vero C F circulo iterum in H occurrat, et H E jungatur. Propter segmentum B H A specie datum, angulus F B G datus est[u]. Angulus autem ad G rectus. Triangulum igitur B F G specie datum. Ergo ratio B G ad G F data. Sed propter rationem B D ad D A datam; componendo, ratio A B ad



u 3. hujus.

B D

u 6. dat. B D data eſt[u]. Ergo et dimidiæ A B, id eſt, B G ad B D ratio data. Convertendo ratio B G ad G D data eſt. Sed oſtenſa eſt ratio B G ad G F data. Ratio
x 8. dat. igitur F G ad G D data eſt[x]. Et angulus ad G rectus. Triangulum igitur F G D ſpecie datum. Angulus igitur G D F datus. Da-
y ex hyp. tus autem C D A[y]. Ergo F D C datus. Sed propter triangulum F G D ſpecie datum, ratio F G ad F D data eſt. Et propter triangulum B G F ſpecie datum, ratio B F ad F G data. Ratio igitur B F ad F D
z 44. dat. data eſt[z]. Ratio igitur C F, quæ ipſi F B æqualis eſt, ad F D data. Triangulum igitur C F D ſpecie datum eſt[z]. Angulus igitur D C F, id eſt, E C H datus. Angulus vero H E C rectus eſt. Datus igitur angulus C H E. Segmentum igitur C H E ſpecie datum eſt. *Q. E. D.*

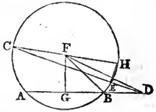


Cor. Rectæ C E ſegmentorum C D, D E ad diametrum utriuſque, et inter ſe, ratio data eſt.

PROP. VI.

Si in ſegmenti ſpecie dati baſe productâ capiatur punctum iſtiuſmodi, ut ſegmenta baſeos inter punctum illud et peripheriam rationem inter ſe datam habeant; recta, a puncto illo in peripheriam in dato angulo educta, ſegmentum auferet ſpecie datum.

Segmentum A C B ſpecie datum ſit. In baſe A B productâ capiatur punctum D, ut ſit A D ad D B in ratione datâ. Et per D ducatur recta D C, quæ angulum C D A dato æqualem faciat, et peripheriæ in punctis C, E occurrat. Dico ſegmentum C H E ſpecie datum. A centro circuli F in baſin A B ad perpendiculum deducatur F G, et F D, F C, F B jungantur. Producta vero C F circulo iterum in H occurrat. Jungatur E H. Propter ſegmentum A C B
a Ut in præced. ſpecie datum, triangulum F G B ſpecie datum eſt[a]. Ratio igitur F G ad G B data. Sed propter rationem

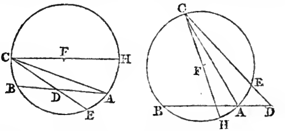


A D

A D ad D B datam; dividendo, ratio A B ad B D data
eft [b]. Ac proinde, ratio dimidiæ A B, feu G B, ad B D [b] 5. et 8.
data. Invertendo et componendo, ratio D G ad G B data dat.
eft. Sed propter triangulum F G B fpecie datum, ratio
G B ad G F data. Quare ratio D G ad G F data eft [c]. [c] 8. dat.
Angulus vero ad G rectus. Triangulum igitur F G D
fpecie datum. Angulus igitur G D F datus eft. Datus
autem G D C [d]. Datus igitur F D C. Propter triangu- [d] ex hyp.
lum vero F D G fpecie datum, ratio F D ad F G data.
Et propter triangulum F G B fpecie datum, ratio F G
ad F B data. Data igitur eft ratio F D ad F B, five F D
ad F C [e]. Triangulum igitur F D C fpecie datum [e]. An- [e] 44. dat.
gulus igitur F C D, feu H C E datus. Angulus vero
C E H rectus eft. Datus igitur C H E. Segmentum
igitur C H E fpecie datum eft.

Cor. 1. Rectæ C E fegmentorum C D, D E ad diametrum utriufque, et inter fe, ratio data eft.

Cor. 2. Arcus B C, A E, C A, B E, rectis A B, C E intercepti, five punctum D intra circulum fuerit, five extra, fpecie



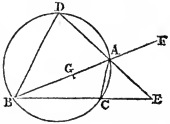
dati funt. Jungatur enim C A. Propter fegmentum
B C A fpecie datum, ratio B A ad diametrum C H data
eft [f]. Data autem eft ratio C D ad C H [g]. Ratio igitur [f] 1. hujus.
C D ad B A data eft [h]. Sed propter rationem B D ad D A [g] Cor. præcedentis et
datam [i], ratio B A ad A D data eft. Data igitur eft ratio Cor. 1. hu-
C D ad D A [h]. Angulus autem C D A datus [i]. Trian- jus.
gulum igitur C D A fpecie datum. Ergo anguli D A C, [h] 8. dat.
A C D magnitudine dati, et arcus B C, A E fpecie [k]. [i] ex hyp.
Arcu autem B C fpecie dato, propter arcum B C A fpecie [k] Def. 2.
datum, arcus A C fpecie datus eft [l]. Et fimili ratione arcu hujus.
E A fpecie dato, propter arcum B A fpecie datum, arcus [l] Cor. 2. Def.
B E fpecie datus. *Q. E. D.* 2. hujus.

PROP.

PROP. VII.

Si in circulo inscribatur recta, segmentum auferens specie datum; angulus autem adjacens ei, qui in segmento, medius dividatur: differentia rectarum, quibus datus in segmento angulus continetur, ad rectam, quâ medius dividitur qui dato adjacet, rationem datam habebit. Et, circulo magnitudine dato, rectangulum, differentiâ rectarum quibus datus in segmento angulus continetur, et segmento rectæ adjacentem medium dividentis, rectâ primum inscriptâ et peripheriâ cavâ intercepto, comprehensum magnitudine datum est.

Circulo ABC inscribatur recta BC, quæ auferat segmentum BDAC specie datum. Tum in peripheriâ BDAC sumatur quodvis punctum A: quod non sit medium peripheriæ BDAC punctum. Junctæ igitur BA, AC inæquales erunt. Esto utravis major, puta BA. Productâ BA utcunque, medius dividatur angulus FAC, qui dato BAC adjacet, rectâ AE, quæ rectæ BC productæ in E, peripheriæ vero iterum in D, occurrat. Rectæ AB auferatur AG, quæ æqualis sit ipsi AC. Dico rationem BG ad AD datam. Jungatur enim BD. Quoniam recta AE angulum FAC medium dividit, idcirco BA : AC = BE : EC. Permutando BA : BE = AC, vel AG : CE. Ergo BG : BC = BA : BE[l] = AC : CE. Sed propter angulos CAE, FAE æquales, et angulum FAE angulo DAB æqualem; idcirco anguli EAC, DAB æquales sunt. Propter circulum vero anguli ADB, ACB simul sumpti duobus rectis sunt æquales. Duobus igitur ACB, ACE æquales. Ablatoque communi ACB, reliquus ACE reliquo ADB æqualis erit. Triangula igitur DAB, CAE similia sunt. Ergo AC : CE = AD : DB. Sed AC : CE = BG : BC; id enim ostensum. Ergo BG : BC = AD : DB. Permutando BG : AD = BC : DB. Propter angulum vero BAC datum, datus est CAF. Datus igitur FAE. Ac proinde DAB datus, et segmentum DAB specie datum. Rectarum igitur BC, DB ratio data est[m]. Quare et rectarum BG, AD ratio data. *Q. E. D.*



[l] 19. quinti.

[m] 2. hujus.

Dico

Dico insuper, circulo A B C magnitudine dato, rectangulum B G × D E magnitudine datum esse. Anguli E C A, A D B ostensi sunt æquales. Angulus autem ad E triangulis duobus A E C, B E D communis est. Similia sunt igitur triangula; et A C : C E = B D : D E. Sed A C : C E = B G : B C (ostensum enim supra.) Ergo B G : B C = B D : D E. Ergo B G × D E = B C × B D. Propter angulum autem D A B datum, dato utique E A F æqualem, segmentum B A D specie datum [n]. Rectæ igitur B D ad circuli diametrum ratio data [o]. Circulo igitur magnitudine dato, recta B D magnitudine data [p]. Simili ratione propter segmentum B A C specie datum [q], recta B C magnitudine data. Rectis autem B D, B C magnitudine singulatim datis, rectangulum B C × B D, sive ejus æquale B G × D E, magnitudine datum est. *Q. E. D.*

[n] Def. 1. hujus.
[o] 1. hujus.
[p] 2. dat.
[q] ex hyp.

Cor. Dato trianguli angulo, si laterum circum angulum datum differentia data sit; in circulo triangulum circumscribente inscripta recta, quæ angulum trianguli externum dato adjacentem medium dividat, magnitudine data est.

Nempe hoc dico, datâ B G magnitudine, rectam A D dari. Ratio enim B G ad A D data [o]. Quare datâ magnitudine B G, dabitur A D [p]. *Q. E. D.*

[o] Per hanc prop.
[p] 2. dat.

PROP. VIII.

Si linea recta ita secetur, ut rectangulum sub segmentis ad quadratum ex totâ datam rationem habeat; segmentorum inter se ratio data est.

Secetur recta A B in puncto C, et detur ratio rectanguli A C × C B ad quadratum ex A B. Dico segmentorum A C, C B rationem datam. Media enim dividatur A B in puncto D. Propter rationem D B ad B A datam, ratio quadrati ex D B ad quadratum ex B A datum.



Data autem ratio rectanguli A C × C B ad quadratum ex A B [q]. Rectanguli igitur A C × C B ad quadratum ex D B ratio data [r]. Invertendo et convertendo quadrati ex D B ad quadratum ex D C ratio data. Quare et rectæ D B ad rectam D C ratio data. Convertendo ratio D B ad B C data. Sed ratio A B ad B D data. Data igitur ratio

[q] ex hyp.
[r] 8. dat.

[s] 8. dat. ratio A B ad B C[s]. Et dividendo, ratio A C ad C B data. *Q. E. D.*

PROP. IX.

Si linea recta ita secetur, ut rectangulum rectâ totâ et segmentorum altero comprehensum ad quadratum ex segmento altero datam rationem habeat; segmentorum inter se ratio data est.

Recta A B in puncto C secetur, et detur ratio rectanguli A B × B C ad quadratum ex A C. Dico segmentorum A C, C B rationem datam esse. Medium enim



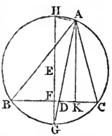
dividatur segmentum A C in puncto D. Propter rationem D C ad C A datam, data est ratio quadrati ex D C ad quadratum ex A C. Sed rectanguli A B × B C ad
[t] ex hyp. quadratum ex A C ratio data[t]. Quadrati igitur ex D C
[u] 8. dat. ad rectangulum A B × B C ratio data[u]. Invertendo et componendo quadrati ex B D ad quadratum ex D C ratio data. Quare et rectæ B D ad rectam D C ratio data. Dividendo ratio B C ad C D data. Data autem ratio
[x] Per construct. A C ad C D[x]. Ratio igitur A C ad C B data[u]. *Q. E. D*

Cor. Si linea recta extremâ et mediâ ratione secetur; segmentorum inter se, et utriusque ad totam ratio data est.

PROP. X.

Si trianguli angulus ad verticem datus sit, et recta a vertice ad basin ducta angulum ad verticem medium dividens, rationem ad basin datam habeat; triangulum specie datum est.

Trianguli A B C angulum ad verticem B A C datum recta A D medium dividat, et basi in puncto D occurrat; et ponatur rectarum A D, B C ratio data. Dico triangulum specie datum esse. Circumscribatur enim circulus B A C G: circuli B A C G centrum esto E. Recta A D circulo occurrat in G. Juncta G E rectæ B C occurrat. Occursus esto F. Producta G E circulo iterum in H occurrat, et A H jungatur. Propter angulos B A G,



C A G æquales, arcus C G, B G æquales sunt. Diameter igitur

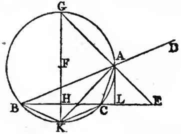
igitur G H rectam B C mediam dividit, et ad rectos secat. Angulus vero H A G rectus est (propter semicirculum.) Triangula igitur H G A, D G F, quæ angulos ad A, F rectos habent, et angulum ad G communem, similia sunt. Ac proinde rectangula H G × G F, A G × G D æqualia sunt. Sed propter angulum B A C datum, circuli segmenta B A C, B G C specie data sunt. Ratio igitur B C ad H G, necnon B C ad G F, data[y]. Sed ratio A D ad B C data est[z]. Ergo ratio A D ad H G, necnon ad G F, data est[a]. Ac proinde quadratum ex A D ad rectangulum H G × G F, sive illi æquale A G × G D, rationem datam habet. Data igitur est ratio G D ad D A[b]. Componendo ratio G A ad A D data. Data autem ratio A D ad H G[c]. Ergo ratio A G ad G H data. Angulus autem G A H rectus. Triangulum igitur G A H specie datum[d]. Angulus igitur H G A datus. Deducta igitur in basin B C ad perpendiculum recta A K, angulus D A K datus. Datus autem D A C, dati nempe B A C semissis. Datus igitur K A C. Verum in triangulo rectangulo A K C, dato acutorum altero K A C, reliquus A C K, sive A C B, datus est. Sed angulus B A C datus est[z]. Trianguli igitur B A C datis duobus angulis, dabitur tertius, et triangulum specie dabitur. *Q. E. D.*

[y] 1. et 4. hujus.
[z] ex hyp.
[a] 8. dat.
[b] 9. hujus.
[c] Per superius ostensa.
[d] 43. dat.

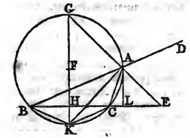
PROP. XI.

Si trianguli angulus ad verticem detur, et recta a vertice ad basin productam deducta, angulum ad verticem externum medium dividens, rationem ad basin datam habeat; triangulum specie datum est.

Trianguli A B C angulus ad verticem B A C detur. Et producto latere B A, angulus externus C A D rectâ A E



medius dividatur. Recta autem A E basi productæ in E occurrat.



occurrat. Ponatur etiam ratio AE ad basin BC data. Dico triangulum specie datum. Circumscribatur enim circulus. Circuli circumscripti centrum esto F. Recta AE circulo iterum in G occurrat. Juncta GF rectæ BC in H occurrat, et circulo iterum in K. Jungantur AK, KB, KC. Propter circulum, anguli BKC, CAD æquales sunt. Semissis igitur anguli CAD, *i.e.* EAD, sive illi æqualis GAB, semissi anguli BKC æqualis. Sed GAB, GKB inter se æquales. Ergo GKB anguli BKC semissis est. Ergo arcus GB arcûs BGC semissis. Arcus igitur GB, GC æquales. Diameter igitur GK rectam BC mediam dividit, et ad rectos secat. Angulus vero GAK rectus est, propter semicirculum. Triangula igitur GAK, GHE, quæ angulos GAK, GHE rectos habent, et angulum ad G communem, similia sunt. Ac proinde rectangula $\overline{EG \times GA}$, $\overline{KG \times GH}$ inter se æqualia sunt. Sed propter circuli segmentum BGC specie datum, recta BC tam ad circuli diametrum GK, quam ad segmenti BAC altitudinem GH, rationem
[e] 1. et 4. hujus. datam habet[e]. Rectæ autem AE ad BC ratio data est[f].
[f] ex hyp. Recta igitur AE tam ad GK, quam ad GH rationem
[g] 8. dat. habet datam[g]. Data igitur est ratio quadrati ex EA ad $\overline{KG \times GH}$, sive illi æquale $\overline{EG \times GA}$. Ac proinde re-
[h] 9. hujus. ctarum GA, EA inter se ratio data est[h]. Data autem ratio EA ad GK. Ratio igitur GA ad GK data. Angulus autem GAK rectus est. Triangulum igitur GAK
[i] 43. dat. specie datum[i]. Angulus igitur AGK datus. Deducta igitur AL ad perpendiculum in basin BC, angulus EAL datus. Datus autem EAC, dati nempe DAC semissis. Datus igitur LAC. Datus vero CAB[f]. Datus igitur LAB. In triangulo igitur ALB rectangulo ad L, dato acutorum altero LAB, reliquus acutus ABL, *i. e.* ABC datus. In triangulo igitur ABC, angulis

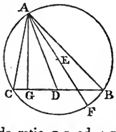
duobus

duobus C A B, A B C datis, dabitur reliquus A C B, et triangulum ſpecie datum eſt[k]. *Q. E. D.* [k] 40. dat.

PROP. XII.

Si trianguli angulus ad verticem detur, et recta a vertice ad baſin in dato angulo deducta, baſin in datâ ratione ſecet; triangulum ſpecie datum eſt.

Trianguli A B C angulus ad verticem B A C detur. Et a vertice A recta A D ad baſin in dato aliquo angulo A D C deducatur. Segmentorum autem baſeos C D, D B ratio detur. Dico triangulum B A C ſpecie datum. Circumſcribatur enim circulus, cujus centrum eſto E. Juncta A E producatur, donec circulo iterum in F occurrat. Propter angulum B A C datum, circuli ſegmentum



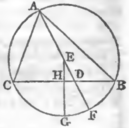
C A B ſpecie datum eſt. Ac proinde ratio B C ad A F data[l]. Et cum recta B C, ſegmentum auferens ſpecie [l] 1. hujus. datum, in datâ ratione in D ſecetur, et a puncto D recta A D ad peripheriam educta ſit in angulo A D C dato; ratio A D ad A F data eſt[m]. Data igitur eſt ratio A D ad [m] Cor. 1. B C[n]. Sed propter rationem B D ad D C datam, com- 6. hujus. ponendo, ratio B C ad C D data eſt. Data igitur eſt [n] 8. dat. ratio A D ad D C[n]. Angulus autem A D C datus[o]. Tri- [o] ex hyp. angulum igitur A D C ſpecie datum[p]. Angulus igitur [p] 41. dat. ACD, *i. e.* A C B, datus. Datus autem C A B[o]. Ergo et reliquus trianguli A C B angulus, A B C, datus eſt; et triangulum ſpecie datum[q]. *Q. E. D.* [q] 40. dat.

PROP. XIII.

Si trianguli angulus ad verticem detur, circuli autem circumſcripti diameter, per verticem trianguli ducta, datum angulum cum baſe faciat; triangulum ſpecie datum eſt.

Triangulum B A C, cujus angulus ad verticem B A C datus, circulus B A C F circumſcribat. Et per centrum circuli E ductâ A E, quæ baſi in D occurrat, ponatur angulus A D C datus. Dico triangulum C A B ſpecie datum eſſe. Medius enim dividatur arcus B C in G. Et juncta E G rectæ B C in H occurrat. Producatur

A D, donec peripheriæ C G B occurrat. Occurſus eſto F. Angulus E H D rectus eſt. Dato igitur A D C, *i. e.* E D H, dabitur H E D ſeu G E F. Arcus igitur G F ſpecie datus[r]. Specie vero datus arcus B G. Ergo B F ſpecie datus[s]. Angulus igitur B A F, *i. e.* B A D, datus. Datus autem B D A[t]. Datus igitur A B D. Sed B A C datus[t]. Datus igitur A C B, et triangulum ABC ſpecie datum[u]. *Q. E. D.*

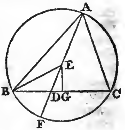


[r] Def. 2. hujus.
[s] Cor. 2. Def. 2. hujus.
[t] ex hyp.
[u] 40. dat.

PROP. XIV.

Si trianguli angulus ad verticem detur, et circulo circumſcripto, ſegmentum diametri inter verticem et baſin, rationem ad baſin datam habeat; triangulum ſpecie datum eſt.

Triangulum A B C, cujus angulus ad verticem B A C datus, circulus B A C F circumſcribat; cujus diameter, A F, per A ducta, baſi B C in D occurrat; et ponatur ratio A D ad B C data. Dico triangulum B A C ſpecie datum. Eſto E circuli B A C F centrum. Ab E in B C ad perpendiculum deducatur E G, et E B jungatur. Propter angulum B A C datum, circuli ſegmentum B A C ſpecie datum eſt. Data igitur eſt ratio B C ad A F[x]. Sed ratio B C ad A D data[y]. Ratio igitur A F ad A D data[z]. Convertendo ratio A F ad F D data. Ac proinde ratio $\frac{1}{2}$ A F, *i. e.* E F, ad F D data. Convertendo ratio F E ad E D data. Sed propter ſegmentum B A C ſpecie datum, angulus E B G datus eſt[a]. Angulus autem E G B rectus. Triangulum igitur B E G ſpecie datum[b]. Ratio igitur E B ad E G data, id eſt, ratio F E ad E G data. Ac proinde, propter datam quoque rectarum E F, E D rationem, ratio E D ad E G data eſt[z]. Angulus autem E G D rectus. Triangulum igitur E D G ſpecie datum[c]. Angulus igitur E D G, *i. e.* A D C datus. Triangulum igitur A B C ſpecie datum eſt[d]. *Q. E. D.*



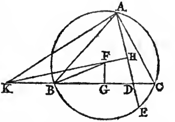
[x] 1. hujus.
[y] ex hyp.
[z] 8. dat.
[a] 3. hujus.
[b] 40. dat.
[c] 43. dat.
[d] Per præc.

PROP.

PROP. XV.

Si trianguli angulus ad verticem detur, et rectâ a vertice ad basin in dato angulo deductâ, si quadratum ex deductâ ad rectangulum sub baseos segmentis rationem datam habeat; triangulum specie datum est.

In triangulo A B C, qui angulum ad verticem B A C datum habeat, deducatur A D ad basin in angulo A D B dato: et ponatur ratio quadrati ex A D ad B D × D C data. Dico triangulum A B C specie datum esse. Circumscribatur enim circulus, a cujus centro F in B C, A D ad perpendiculum deducantur F G, F H. Recta autem A D circulo iterum in E occurrat. Propter rationem quadrati ex A D ad $\overline{B D \times D C}$ datam; ratio quadrati ex A D ad $\overline{A D \times D E}$ data est[c], id est, ratio A D ad D E data. Data igitur ratio A D ad A E[d], ac proinde ad $\frac{1}{2}$ A E, sive ad H A. Dividendo, ratio D H ad H A data. Datus angulus ad D vel rectus est, vel non. Non sit primo rectus. Rectæ igitur F H, C B sibi mutuo occurrent. Occursus esto K. Et A K jungatur. Propter angulos ad G, H rectos, angulus K F G angulo K D H æqualis est. Datus autem K D H[e]. Datus igitur K F G. Angulus autem ad G rectus. Triangulum igitur K F G specie datum[f]. Ratio igitur K G ad G F data. Jungatur F B. Propter angulum B A C datum, circuli segmentum B A C specie datum est. Angulus igitur F B G datus[g]. Triangulum igitur B F G, ad G rectangulum, specie datum est. Ergo ratio F G ad G B data. Sed ostensa est ratio K G ad G F data. Data igitur est ratio K G ad G B[h], sive illi æqualem G C. Quare componendo, ratio K C ad C G, ac proinde ad 2 C G, sive C B, data. Et convertendo, ratio K C ad K B data. Sed propter angulum K D H datum, et angulum ad H rectum, triangulum K H D specie datum est[f]. Ratio igitur K H ad H D data. Data autem est ratio D H ad H A, per ea quæ supra ostensa sunt. Ratio igitur K H ad H A data[h]. Angulus autem K H A rectus. Triangulum igitur K A H specie datum[i]. Angulus igitur

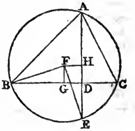


c 35. tertii, et 7. quinti.
d 6. dat.
e ex hyp.
f 40. dat.
g 3. hujus.
h 8. dat.
i 41. dat.

igitur AKH datus. Sed propter triangulum H K D ſpecie datum, angulus H K D datus eſt. Datus igitur eſt angulus A K D, ex datis ſcilicet compoſitus. Circulo igitur B A C recta B C inſcripta eſt, quæ ſegmentum B A C abſcindit ſpecie datum; et in rectâ B C ſumptum eſt punctum K, quod facit ſegmenta K C, K B in ratione datâ; et a puncto K recta K A ad circulum educta eſt in angulo A K D dato. Rectæ igitur K A, K C arcus intercipient ſpecie datos[k]. Arcus igitur A C ſpecie datus eſt. Angulus igitur A B C datus[l]. Datus autem B A C[m]. Reliquus igitur A C B datus, et triangulum A B C ſpecie datum eſt[n]. *Q. E. D.*

[k] Cor. 2. 6. hujus.
[l] Def. 2. hujus.
[m] ex hyp.
[n] 40. dat.

Jam vero angulus A D B rectus ſit. In hoc caſu rectæ F H, G D parallelæ ſunt. Jungantur B F, F E. Oſtendetur, ut prius, ratio D H ad H A, ſive H E, data. Ipſi autem H D æqualis eſt F G. Ratio igitur F G ad H E data. Sed propter triangulum B F G ſpecie datum, ratio B F ad F G data. Data igitur eſt ratio H E ad B F[o], ſive E F. Et angulus E H F rectus. Triangulum igitur E H F ſpecie datum eſt[p]. Angulus igitur H E F datus. Ergo angulus G F E (= H E F) datus. Datus autem B F G. Ergo B F E datus, ac proinde B A E datus, id eſt, angulus B A D datus. Rectus autem ad D. Datus igitur A B D, ſive A B C. Datus autem B A C[m]. Reliquus igitur A C B datus, et triangulum ſpecie datum[n]. *Q. E. D.*



[o] 8. dat.
[p] 43. dat.

PROP. XVI.

Duæ rectæ ſpatium datum in angulo dato continentes, ſi earum altera, datâ quâdam aucta vel imminuta, ad alteram, eâdem vel aliâ datâ auctam vel imminutam, datam rationem habeat, magnitudine utræque datæ ſunt.

CAS. I. Rectis, quæ datum ſpatium continent, datâ utriſque auctis.



Rectæ A B, B C datum ſpatium comprehendant in angulo

angulo dato. Rectangulum igitur A B × B C datum[q]. [q] Lemma
Rectæ autem A B adjiciatur data A D, et rectæ B C vel 2.* dat.
æqualis, vel alia data C E. B D autem ad B E datam rationem habeat. Dico A B, B C magnitudine singulatim datas.

Cum enim rectis D B, B E, quæ datam inter se rationem habent[r], datæ auferantur A D, C E, reliqua [r] ex hyp.
A B ad reliquam B C, vel datam rationem habebit, vel altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione[s]. Re- [s] 15. dat.
ctangulo igitur A B × B C dato, rectæ A B, B C magnitudine singulatim datæ[t]. *Q. E. D.* [t] 55. et 84. dat.

CAS. 2. Rectis, quæ datum spatium continent, utrisque datâ imminutis.

Rectis A B, B C spatium datum in dato angulo continentibus auferantur datæ A D, E C. D B vero ad B E datam rationem habeat. Dico A B, B C magnitudine

A D B E C

singulatim datas. Cum enim duabus D B, B E, quæ datam inter se rationem habent, adjiciantur datæ A D, E C; tota A B ad totam B C, vel datam rationem habebit, vel altera alterâ major erit, datâ, quam in ratione[u]. [u] 14. dat.
Rectangulum autem A B × B C, ut in casu priori, datum[q]. Datæ igitur A B, B C, ut in casu priori[t]. *Q. E. D.*

CAS. 3. Quando altera ex rectis, quæ datum spatium continent, datâ quâdam augetur, altera earundem datâ imminuitur.

Rectis A B, B C spatium datum in angulo dato continentibus, alteri earum A B adjectam puta datam A D, alteri vero B C puta datam C E ablatam. Rectarum

D A B E C

vero D B, B E ratio detur. Dico A B, B C magnitudine utrasque datas. Cum enim rectæ D B, B E datam inter se rationem habeant, alteri autem B E addita sit data E C, alteri D B data A D ablata; tota B C reliquâ A B major erit, datâ, quam in ratione[x]. Rectangulum autem [x] 16. dat.
A B × B C, ut in casu primo, datum[q]. Rectæ igitur A B, B C magnitudine utræquæ datæ sunt[y]. [y] 84. dat.

PROP. XVII.

Duæ rectæ ſpatium datum in angulo dato continentes, ſi datis ablatæ relinquant aliquas in ratione datâ, magnitudine utræque datæ ſunt.

Datis duabus A B, A C auferantur A D, A E, quæ datum ſpatium in angulo dato continent. Si reliquæ B D, E C datam inter ſe rationem habent, dico A D, A E



magnitudine utraſque dari. Cum enim datis duabus A B, A C ablatæ ſint B D, E C, quæ datam inter ſe rationem habent, reliqua A D ad reliquam A E, vel datam rationem habebit, vel altera alterâ major erit, datâ,
[z] 20. dat. quam in ratione [z]. Spatio autem dato, quod in angulo dato rectæ A D, A E continent, rectangulum A D × A E
[a] Lemma 2.* dat. datum [a]. Rectæ igitur A D, A E magnitudine ſunt
[b] 55. et 84. dat. utræque datæ [b]. *Q. E. D.*

PROP. XVIII.

Duæ rectæ ſpatium datum in angulo dato continentes, ſi alterius earum et datæ cujuſdam ſumma ad duarum ſummam datam rationem habeat, magnitudine utræque datæ ſunt.

Rectæ duæ A B, B C ſpatium datum contineant in angulo dato. Alteri A B data A D adjiciatur, et data



intelligatur ratio D B ad A C. Dico A B, B C magnitudine utraſque datas. Dato ſpatio, quod rectæ A B, B C in dato angulo continent, rectangulum etiam A B
[c] Lemma 2.* dat. × B C datum [c]. Capiatur A G, ad quam data A D datam illam rationem habeat, quam D B ad A C. Recta igitur
[d] 2. dat. A G magnitudine data [d]. Datæ autem A G, vel æqualis erit B C, vel inæqualis.

CAS. I. Si æquales ſint A G, B C, propter datam A G magnitudine, dabitur etiam B C magnitudine. Datoque
[e] 57. dat. etiam rectangulo A B × B C, data erit A B [e]. Duæ igitur A B, B C in hoc caſu magnitudine utræque datæ. *Q. E. D.*

CAS.

Cas. 2. Sed inæquales sint A G, B C, et major primum sit A G. Ipsi A G æqualis capiatur C H. Jam cum D B sit ad A C, ut A D ad A G, vel C H, erit A B ad

D G A H B C

A H, ut A D ad A G [f]. Convertendo A B erit ad B H, ut A D ad D G. Rectangulum igitur A B × B C ad rectangulum B H × B C datam illam rationem habet, quam data A D ad datam D G. [f] 19. quinti.

Cas. 3. Inæqualium autem A G, B C si minor sit A G, sumptâ C H, ut prius, ipsi A G æquali, cum sit D B ad A C, ut A D ad A G, vel C H; rursum erit A B ad A H, ut

G D A B H C

A D ad A G. Invertendo, A H ad A B, ut A G ad A D. Dividendo H B ad B A, ut G D ad D A. Atque rursum invertendo A B ad B H, ut A D ad D G. Quare rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × B C datam illam rationem habet, quam data A D ad datam D G.

In casu igitur utroque, rectanguli A B × B C ad rectangulum B H × B C ratio data. Rectangulum autem A B × B C magnitudine datum. Quare magnitudine etiam datum rectangulum B H × B C [g]. Cujus laterum B H, B C in casu secundo summa C H, in hoc tertio differentia C H, data. Latus igitur utrumque B H, B C datum [h]. Datâ autem B C, data quoque A B propter A B × B C datum [i]. *Q. E. D.*

[g] 2. dat.
[h] Cor. 2. 59. dat.
[i] 57. dat.

PROP. XIX.

Positis, ut prius, duabus rectis, quæ datum spatium in dato angulo contineant; si alterius earum et datæ cujusdam summa ad duarum differentiam rationem datam habeat, magnitudine utræque datæ sunt.

Duæ rectæ A B, B C datum spatium contineant in angulo dato. Rectangulum igitur A B × B C, ut in superioribus, magnitudine datum. Duarum A B, B C alteri A B adjiciatur data quædam A D. Duarum autem

D G A H C B

differentia sit A C; et data sit ratio D B ad A C. Dico duas

D G A H C B

duas A B, B C magnitudine utrasque datas. Recta A B, cui adjecta est data A D, duarum A B, B C vel major est, vel minor.

CAS. 1. Sit major primum, et datæ A D auferatur A G, ad quam A D datam illam rationem habeat, quam D B ad A C. Data igitur est A G [k], dataque etiam D G, datarum D A, A G differentia. In rectà A C capiatur C H rectæ A G æqualis. Cum igitur D B sit ad A C, ut D A ad A G, vel ejus æqualem C H, erit A B ad A H, ut D A ad A G [l]; et convertendo A B ad B H, ut D A ad D G. Quare rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × B C datam rationem habet, quam data D A ad datam D G.

[k] 2. dat.

[l] 19. quinti.

CAS. 2. Si recta A B, cui adjecta est data A D, duarum A B, B C minor sit, datæ A D adjiciatur A G, ad quam A D datam illam rationem habet quam D B ad

C H D A G B

A C. Data igitur est A G, ut prius, dataque etiam D G, datarum D A, A G in hoc casu summa. In rectâ C A capiatur rursum C H, datæ A G æqualis. Cum igitur sit D B ad A C, ut A D ad A G, vel C H, erit, ut prius, A B ad A H, ut A D ad A G. Invertendo A H ad A B, ut A G ad A D. Componendo, B H ad A B, ut D G ad A D. Denique rursum invertendo A B ad B H, ut A D ad D G. Quare et rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × B C, ut A D ad D G.

In utroque igitur casu rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × B C datam illam rationem habet, quam data A D ad datam D G. Rectangulum autem A B × B C magnitudine datum. Rectangulum igitur B H × B C magnitudine datum [k]. Laterum autem B H × B C data est differentia C H [m]. Latus igitur utrumque B H, B C magnitudine datum [n]. Datâ autem B C, erit etiam A B data propter rectangulum A B × B C magnitudine datam [o]. Rectæ igitur A B, B C magnitudine utræque datæ. *Q. E. D.*

[m] Per construct.

[n] Cor. 2. * 59. dat.

[o] 57. dat.

PROP.

PROP. XX.

Positis, ut prius, duabus rectis (A B, B C) *quæ datum spatium in dato angulo contineant, si alterius earum* (A B) *et datæ cujusdam* (A D) *differentia* (B D) *ad duarum summam* (A C) *rationem datam habeat, dico magnitudine utrasque datas esse.*

Data A D vel major erit quam A B, vel minor.

CAS. I. Sit major primum. Datæ A D adjiciatur D G, ad quam A D datam illam rationem habeat, quam B D ad A C. Magnitudine data erit D G [p]. In C A capiatur [p] 2. dat.



C H datæ D G æqualis. Propter datas magnitudine D A, D G dabitur etiam A G datarum summa. Cum vero D A sit ad D G, vel ejus æqualem C H, ut D B ad A C; erit A B ad A H, ut A D ad D G [q]. Invertendo A H [q] 19. quinti. ad A B, ut D G ad A D. Componendo B H ad A B, ut A G ad A D. Atque iterum invertendo A B ad B H, ut A D ad A G. Quare et rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × BC, ut A D ad A G.

CAS. 2. Sed minor sit data A D quam A B. In hoc casu rectæ B D adjiciatur D G, ad quam data A D datam



illam rationem habeat, quam B D ad A C. Itaque dabitur iterum D G magnitudine. Huic in B C productâ capiatur æqualis C H. Propter datas A D, D G magnitudine, dabitur etiam A G, datarum utique differentia. Cum vero sit D A ad D G, vel ejus æqualem C H, ut D B ad A C, erit A B ad A H, ut D A ad D G [r]. Inver- [r] 12. quinti. tendo, A H ad AB, ut D G ad D A. Dividendo H B ad B A, ut A G ad A D. Atque iterum invertendo B A ad B H, ut A D ad A G.

In casu igitur utroque rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × B C datam rationem habet, quam data A D ad datam A G. Rectangulum igitur B H × B C, ut in superioribus, datum; datâque laterum ejus B H, B C in casu priori summâ, in hoc differentiâ, C H, latus utrumque datum [s]. Datâ autem B C, dabitur etiam A B, [s] Cor. 2. 59. dat. ut prius; utræque igitur A B, B C datæ. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. XXI.

Positis rursum duabus rectis (A B, B C) *quæ datum spatium in dato angulo contineant, si alterius earum* (A B) *et datæ cujusdam* (A D) *differentia* (B D) *ad duarum differentiam* (A C) *rationem datam habeat, magnitudine utræque datæ sunt.*

Hujus propositionis casus sunt quatuor. Duarum enim A B, B C sive major sive minor fuerit A B, a datâ quâdam A D vel superari illa potest, ut in fig. 1, 2, 3,

Fig. 1.



Fig. 2.



Fig. 3.



Fig. 4.

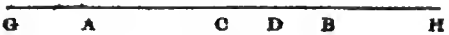


Fig. 5.



vel datam superare, ut in fig. 4, 5. Utcunque fuerit, datæ A D in fig. 1. et 5. adjiciatur D G, in fig. 2, 3, 4, versus punctum A capiatur D G, ad quam data A D datam rationem habeat, quam D B ad A C. Data
t 2. dat. igitur magnitudine est D G [t], et datarum A D, D G, in fig. 1. et 5, summa, in fig. 2, 3, 4, differentia A G data. Datæ autem D G æqualis capiatur C H, ipsi scilicet A C adjicienda in fig. 1. 4. et 5, sed in fig. 2, 3. ad partes puncti A ponenda. Jam cum D B sit ad A C, ut A D ad D G vel C H, erit A B ad A H, ut A D ad D G; nempe per 19. quinti, in fig. 1, 2, 3, sed per 12. quinti in fig. 4. et 5. Erit igitur A B ad B H, ut

ut A D ad A G. Nimirum in fig. I. et 5, invertendo, componendo, atque iterum invertendo. In fig. autem 2ª convertendo. In 3ª et 4ª invertendo, dividendo atque iterum invertendo. In omni igitur casu A B est ad B H, ut A D ad A G. Quare et rectangulum A B × B C ad rectangulum B H × B C datam illam rationem habet, quam data A D ad A G datam. Unde datum efficitur rectangulum B H × B C, et ex dato illo rectangulo adstruitur, ut in superioribus, veritas propositionis. Duæ igitur A B, B C magnitudine utræque datæ sunt. *Q. E. D.*

Duæ igitur rectæ datum spatium in dato angulo continentes, si alterius earum et datæ cujusdam vel summa, vel differentia ad alterius et ejusdem, vel alius datæ, vel summam, vel differentiam, vel ad duarum vel summam, vel differentiam, datam rationem habeat, magnitudine utræque datæ sunt.

Hæc enim est summa sex ultimarum. Quarum ope, ut illud obiter moneamus, nobilissimi Problematis Apolloniani *De Inclinationibus* casus præcipui resolutionem capiunt.

SCHOLION.

Quod superest, in duobus hisce Datorum Libris, Euclidis altero, altero, quem, ejus vestigiis insistentes, ipsi concinnavimus, tradita sunt prima et præcipua analyticês illius fundamenta, cujus subsidio freti veteres etiam in difficillima dominabantur problemata, et constructionem eorum efficiebant; nec in planis tantum et solidis, verum etiam insuper in linearibus. Quam sane veterum analysin juniores si diligentius excoluissent, quæ ejusdem generis sunt, si non majora etiam et magis subtilia, facilius multo et ipsi invenissent, et aliis in scriptis suis luculentius tradidissent. Etenim speciosa quæ dicitur analysis, quâ confisi post Cartesium fere omnes, veteres magistros ausi sunt deserere, utut nihil non promittat, quasi æquationum ope omnia efficienda essent, revera manca et imperfecta est, et, sine Geometriâ, non nisi ad pauca utilis; utpote quæ pars est tantummodo,

tummodo, vel fragmentum potius veræ et abſolutæ analyſeos. Figuræ enim, quotquot ſunt, lineis terminantur, vel pluribus, vel curvâ fortaſſe unâ. Linearum vero plurium, ut et partium ejuſdem curvæ, relatio duplex eſt. Quantitate enim diſtinguuntur et ſitu. Algebra interea in eo verſatur unice, ut meras quantitatis relationes expendat; quas optimo certe compendio indagatur, et ex notis ignotas mirâ facilitate promit. Meras autem dico quantitatis relationes, quæ ex ſitu nullo modo pendent. Situs linearum varios dignoſcere, et cum alias omnes tum et ipſius quantitatis relationes, ſi quæ, ex ſitu oriundæ, vel lineis ipſis, vel figuris, quas lineæ claudunt, intercedant, explorare, id, ni fallor, Geometriæ munus eſt. In problematis autem plerisque, ſolutio eorum ex utrâque relatione pendet; ſitûs dico et magnitudinis; et compendioſius ſaltem ex utrâque junctim, quam ex hâc vel illâ ſeorſim elicienda eſt. Poſitiones vero linearum diverſas, interſectiones, contactus, angulos, flexuras, et quæ plurima inde forte conſequantur, quæ vix fieri poteſt ut prudentiorem paulo Geometram, vel lateant, vel fugiant, Calculus ſæpiſſime præterire ſolet; imo conſulto evitare, ſi primario magiſtrorum præcepto obtemperetur, qui ſtudium et diligentiam in illud potiſſimum intendi jubent, ut ad pauciſſima principia omnia revocentur. Unde haud raro evenit, ut qui æquationibus concinnandis nimium ſe delectari ſinunt, exitu operis, quod brevi ſane et nullo fere negotio conficiunt, in conſtructiones aut nullas plane incidant, aut perplexas adeo et laborioſas, ut omni prorſus utilitate careant. Algebræ autem ita demum legitimus erit in Geometriâ uſus, ſi in iis, quæ calculo expedienda ſunt, ſolis adhibeatur. Neque tamen Geometris auctor eſſem, ut ad calculum rem quamque propoſitam deducere conentur. Imo contrarium vehementer ſuadeo. Conſtructiones enim ſimpliciſſimas et facillimas eſſe eas, quæ ex poſitionibus partium figuræ petitæ ſunt, omnino mihi perſuaſum habeo, neque id ex opinione tantum, ſed uſu et multiplici experientiâ edoctus. Sed cum, indagine rite inſtitutâ, omnibus datorum et quæſitorum tam ſitûs quam magnitudinis relationibus diligenter perpenſis, eo tandem ſuâ quaſi ſponte res devenerit, ut mero calculo ulterius proſequenda ſit, nollem ſane cæcâ adeo veneratione antiqua amplecti,

amplecti, ut in tali negotio, recentiora Algebræ compendia ingratus ſpernerem. Hæc autem omnia non temere a nobis diſputari, exempla optime, ut opinor, et certiſſime confirmabunt; problemata ſcilicet, quæ cum reſolutione eorum Geometricâ adjicere jam pergo, quo Tyronibus conſtet magis et eluceat methodi hujus vis atque ratio, et ea, quam in ſe habet præ methodo Algebraicâ excellentiam.

PRO-

PROBLEMATUM DELECTUS,

CUM

RESOLUTIONE EORUM GEOMETRICA.

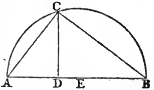
I

PROBLEMATUM DELECTUS.

PROBLEMA I. (Arithmeticæ Univerfalis xv.)

Super rectam A B *magnitudine et pofitione datam, triangulum conftituere, cujus bafis, laterum, et perpendiculi continua fit proportio.*

FACTUM puta. Trianguli fcilicet A B C, fuper bafin A B conftituti, bafis A B, laterum B C, C A, et perpendiculi C D continua fit proportio. Nimirum ut A B fit ad B C, ut B C ad C A, et C A ad C D. Et primum, cum fit A B ad B C, ut A C ad C D; rectangula A B × C D, C B × C A erunt inter fe æqualia [a]. Rectangulum autem A B × C D eft duplum trianguli A C B [b]. Rectangulum igitur C B × C A trianguli A C B duplum. Quapropter angulus A C B rectus eft [c]. Eft igitur punctum C ad femicirculum pofitione datum, bafi nempe A B conftitutum [d]. Rurfum cum fit A B ad B C, ut B C ad C A, quadratum ex B C rectangulo A B × A C eft æquale [e]. Quadratum autem ex B C rectangulo A B × B D eft æquale [f]. Rectangulum igitur A B × A C rectangulo A B × B D eft æquale. Quare recta A C rectæ B D æqualis eft, et quadratum ex A C quadrato ex B D. Quadratum autem ex A C æquale eft rectangulo A B × A D [c]. Quare et quadratum ex B D rectangulo A B × A D eft æquale. Recta igitur A B, magnitudine et pofitione data, extremâ et mediâ ratione divifa eft in puncto D. Quare punctum D datum [g]. Recta igitur D C a dato puncto D in rectâ A B, pofitione datâ, ad perpendiculum educta, pofitione



[a] 16. fexti.
[b] 41. primi.
[c] Cor. 3.
66. dat.
[d] 31. tertii.
[e] 17. fexti.
[f] Cor. 8. fexti.
[g] Cor. 2. 9. Addit.

pofitione

[d] 29. dat. positione data est[d]. Sed semicirculus A C B positione [e] 25. dat. datus. Punctum igitur C datum[e]. Data autem puncta A, B. Quare rectæ B C, A C positione et magnitudine datæ, et triangulum A C B datum. *Q. E. I.*

COMPOSITIO.

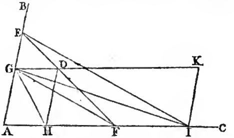
Media dividatur recta A B in puncto E. Centro E, intervallo E A describatur semicirculus A C B. Recta [f] 30. sexti. A B extremâ et mediâ ratione dividatur in puncto D[f]. A puncto D educatur D C ad perpendiculum rectæ A B, quæ semicirculo in C occurrat. Junctis C A, C B, problemati satisfactum fuerit.

PROBL. II. (Arithmet. Univ. xx.)

Per datum punctum rectam lineam ducere, quæ cum duabus rectis positione datis triangulum comprehendat datæ magnitudinis.

Sit datum punctum D, et rectæ duæ positione datæ sint A B, A C. Ducenda est recta per punctum D, quæ cum duabus A B, A C triangulum comprehendat dato spatio (quod dicatur S) æquale.

Factum puta. Recta scilicet E D F per D ducta, rectis A B, A C in punctis E, F occurrens, triangulum E A F faciat æquale dato spatio S. Per punctum D ducantur D G, D H, ipsis A C, A B singulatim parallelæ, quæ pro- [g] 28. dat. inde positione datæ sunt[g]. Occurrat autem D G ipsi A B in puncto G, et D H ipsi A C in puncto H. Puncta [h] 25. dat. igitur G, H data[h], rectæque A G, A H tam magnitudine



[i] 26. sexti. quam positione datæ[i]. Jungatur G F, et per punctum E ducatur E I ipsi G F parallela, quæ rectæ A C in I occurrat.

Propter

Propter rectas G F, E I parallelas basimque G F communem, æqualia erunt triangula G I F, G E F. Punctum autem D vel intra angulum B A C, vel extra eum erit.

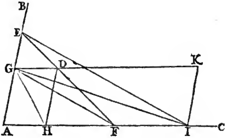
CAS. I. Sit primum intra. Et triangulo G A F additis æqualibus E G F, G I F, erunt triangula E A F, G A I inter se æqualia. Triangulum autem E A F magnitudine datum [i]. Quare et ejus æquale G A I magnitudine datum. Recta autem A G magnitudine data, et [i] ex hyp. angulus B A C datus. Quare trianguli G A I, magnitudine dati, latus alterum A I magnitudine datum [k]. Sed [k] 57. dat. et positione, punctumque A datum. Quare datum erit punctum I. Cæterum propter parallelas G F, E I, erit A I ad I F, ut A E ad E G. Et propter parallelas G D, A F, erit A E ad E G, ut E F ad E D. Et rursum propter parallelas A E, H D, erit E F ad E D, ut A F ad A H. Erit igitur A I ad I F, ut A F ad A H [l]. Unde rectangulum [l] 11. quinti. A F × F I rectangulo I A × A H æquale. Datum autem magnitudine rectangulum I A × A H, propter rectas I A, A H magnitudine singulatim datas. Rectangulum igitur A F × F I magnitudine datum. Recta autem A I magnitudine et positione data. Datum igitur punctum F [m]. Punctum autem D datum [l]. Recta igitur F D po- [m] Cor.* 58. dat. sitione data est. *Q. E. D.*

DIORISMUS.

Ad compositionem hujus casûs necesse est rectangulum I A × A H majus non sit quadrato ex dimidiâ A I; id est, cum quadratum ex dimidiâ subquadruplum sit quadrati ex totâ, necesse est recta A I minor non sit quadruplâ A H. Junctâ igitur G H, triangulum G A I, seu spatium datum S, non minus sit necesse est quam quadruplum trianguli G A H [n], seu duplum parallelo- [n] 1. sexti. grammi A D.

Et revera triangulum, quod duplo parallelogrammi A D æquale sit, minimum esse omnium, quæ rectâ per D et datis rectis A B, A C comprehendi possunt, sic ostendimus. Recta E F aut in æqualia dividitur in puncto D, aut in inæqualia. Primum in æqualia divisa sit, ut F D, D E sint inter se æquales. Itaque propter parallelas D H, A B, erunt etiam F H, H A inter se æquales. Item propter parallelas D G, A C, inter se æquales A G, G E. Sed cum æquales sint F H, H A, et rectæ A C, G D parallelæ, triangulum D H F æquale erit triangulo

 G A H.



[p] 38. primi. G A H [p]. Simili ratione cum æquales sint A G, G E, et rectæ A B, H D parallelæ, triangulum D G E eidem G A H æquale. Utrumque igitur triangulorum D H F, D G E triangulo G A H æquale est. Quare duo simul duplo trianguli G A H, *i. e.* parallelogrammo A D sunt æqualia. Duo igitur triangula D H F, D G E, cum parallelogrammo A D, ipsius parallelogrammi duplo sunt æqualia. Sed duo triangula D H F, D G E cum parallelogrammo A D triangulum ipsum E A F conficiunt. In hoc igitur casu triangulum E A F duplo parallelogrammi A D est æquale.

Jam vero punctum D rectam E F in inæqualia dividat, scilicet ut inæquales sint F D, D E. Dico in hoc casu triangulum E A F duplo parallelogrammi A D majus esse. Propter parallelas enim D H, A B, necnon D G, A C; cum inæquales sint F D, D E, erunt etiam F H, H A, necnon A G, G E inæquales. Nimirum cum sit F D ad D E, ut F H ad H A, necnon ut A G ad G E; id enim in analysi ostensum. Triangulo igitur G A H duorum D H F, D G E neutrum est æquale, neque duo illa inter se æqualia. Triangulum autem D H F ad G A H rationem habet, quam recta F H ad rectam H A [q]. Et triangulum G A H ad D G E rationem habet quam A G ad G E. Quare cum A G sit ad G E, ut F H ad H A (sic enim ostensum in analysi) triangulum D H F ad G A H eandem habet rationem, quam G A H ad D G E. Trium igitur D H F, G A H, D G E continua est analogia. Et cum tria, quorum continua est analogia, sunt inæqualia; extremorum alterum maximum, alterum minimum erit. Quapropter extrema D H F, E G D, simul sumpta, medii G A H duplo sunt majora [r]. Duo igitur triangula D H F, D G E simul sumpta parallelogrammo A D sunt majora. Et duo illa cum parallelogrammo

[q] 1. sexti.

[r] 25. quinti.

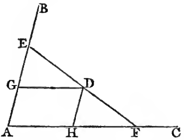
A D,

A D, hoc eſt, triangulum E A F, duplo A D majus. *Q. E. D.*

COMPOSITIO CAS. I.

Rectis A B, A C poſitione datis, punctoque D intra angulum B A C dato, dato etiam ſpatio s; per punctum D ducenda eſt recta, quæ cum rectis A B, A C triangulum comprehendat dato ſpatio s æquale.

Per D ducantur rectæ D G, D H, ipſis A C, A B parallelæ. Si ſpatium datum s minus ſit duplo parallelogrammi A D, problema eſt impoſſibile. Minus igitur

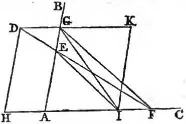


non ſit. Aut æquale igitur, aut majus. Si æquale ſit datum ſpatium s duplo parallelogrammi A D, componitur problema modo peculiari. Sumatur nempe in A C recta H F ipſi A H æqualis. Juncta F D, rectæ A B producta in E occurrat. Recta E D F problemati ſatisfacit; triangulum enim E A F, quod recta illa F E cum poſitione datis A B, A C comprehendit, duplum eſt parallelogrammi A D, ac proinde dato ſpatio s æquale.

Sed majus ſit ſpatium s duplo parallelogrammi A D. Vide fig. Pag. 118. Ad rectam A G in angulo G A C applicetur parallelogrammum G A I K, quod duplo ſpatii s æquale ſit. Latus alterum applicati A I in rectam A C neceſſario incidet. Ad datam A I applicetur rectangulum ipſi I A × A H æquale, quod quadrato deficiat[s]. Latitudo ejus, quo deficit applicatum, ſit I F. Jungatur F D, quæ producta occurret rectæ A B. Occurrat in puncto E. Recta E D F problemati in hoc caſu ſatisfacit. Triangulum enim E A F rectâ E F per D, datiſque A B, A C comprehenſum dato ſpatio æquale eſt.

[s] 28. ſexti.

CAS. 2. Sed extra angulum B A C sit datum punctum D. Triangulo G A F ablatis æqualibus G E F, G I F, relinquentur E A F, G A I, inter se æqualia. Triangulum



igitur G A I magnitudine datum. Unde punctum I, ut in casu priori, datum. Rectangula autem A F × F I, I A × A H, ut in casu priori, ostenduntur inter se æqualia. Rectangulum igitur A F × F I magnitudine datum. Et recta A I magnitudine et positione data. Punctum igitur F datum [t]. Datum autem punctum D. Recta igitur F D positione data. *Q. E. D.*

[t] Cor. * 59. dat.

COMPOSITIO CAS. 2.

Per punctum datum D ducantur rectæ D H, D G positione datis A B, A C parallelæ. Ad rectam A G, in ipso angulo G A C applicetur parallelogrammum G A I K, quod duplo spatii S æquale sit. Latus alterum applicati A I in rectam A C necessario incidet. Ad rectam A I applicetur rectangulum ipsi I A × A H æquale, quod quadrato excedat [u]. Latitudo ejus, quo excedit applicatum, sit I F. Juncta F D problemati satisfacit. Occurret enim datæ A B. Occurrat in E. Triangulum E A F, rectâ per D cum rectis positione datis A B, A C comprehensum, dato spatio S æquale est. *Q. E. F.*

[u] 29. sexti.

DEMONSTRATIO.

In utroque casu, junctis G I, E I, G F, propter rectangula A F × F I, I A × A H æqualia, erit F A ad A H ut I A ad I F. Sed F A : A H = F E : E D; propter rectas D H, A B parallelas [x]. Et F E : E D = A E : E G; propter rectas D G, A C parallelas [x]. Quare I A : I F = A E : E G [y]. Rectæ igitur G F, E I, inter se sunt parallelæ [z], ac proinde triangula G E F, G I F inter se æqualia [a]. Triangulo autem G A F æqualibus illis G E F, G I F in casu primo additis, in secundo demptis, fient triangula E A F, G A I inter se æqualia.

[x] Ex construct.
[y] 11. quinti.
[z] 2. sexti.
[a] 39. primi.

æqualia. Trianguli autem G A I duplum eſt parallelogrammum A K [a]. Spatii autem dati S idem parallelogrammum duplum [b]. Triangulum igitur G A I ſpatio S æquale eſt. Triangulum igitur E A F, quod æquale eſt illi G A I, ſpatio S æquale.

[a] 41. primi.
[b] Per conſtruct.

PROBL. III. (Arithmet. Univ. xxii.)

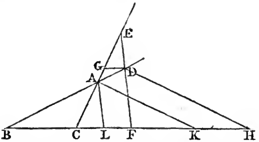
Tribus trianguli rectilinearis lateribus poſitione datis, rectam ducere, cujus ſegmenta lateribus trianguli intercepta ſint datæ utrumque magnitudinis.

Trianguli rectilinearis A B C latera A B, B C, C A poſitione dentur. Ducenda eſt recta, cujus ſegmenta lateribus trianguli intercepta ſint datæ utrumque magnitudinis.

Duplici modo duci poteſt recta, quæ Problemati ſatisfaciat. Nempe ut vel omnibus trianguli lateribus productis occurrat, vel uni tantum producto, reliquis duobus inter apices trianguli.

EPITAGMA I.

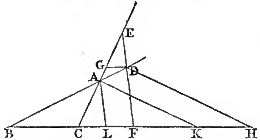
Primum eo modo ducenda ſit, ut omnibus trianguli lateribus productis occurrat.



Factum puta. Ut recta E D F, quæ lateribus trianguli A B, A C, B C productis in punctis D, E, F occurrit, ſegmenta habeat lateribus intercepta, E D, D F, datæ utrumque magnitudinis.

Ducatur per D recta D G ipſi B C parallela, quæ rectæ C A in G occurrat. Propter parallelas D G, C F, erit C F ad G D, ut F E ad E D. Datis autem magnitudine rectis F E, E D, ratio F E ad E D data [d]. Rurſum propter parallelas D G, C B, triangulum G D A ſimile eſt triangulo C B A [c]. Triangulum autem C B A ſpecie datum,

[c] Cor. 2. ſexti.
[d] 1. dat.



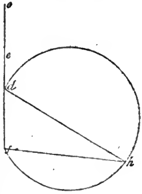
tum, rectis utique A B, B C, C A positione datis. Specie igitur datum triangulum G D A, et ratio A D ad D G data. Duarum itaque C F, A D utraque ad G D datam rationem habet. Duarum igitur C F, A D inter se
[a] 8. dat. ratio data [a]. Hisce autem C F, A D, quæ datam inter se rationem habent, datis B C, B A additis, summa ad summam, B F ad B D, vel datam rationem habet, quam C F ad A D, vel altera alterâ major, datâ, quam in ra-
[a] 14. dat. tione [a]. Sed non habet B F ad B D rationem eam, quam
[b] 2. sexti. C F ad A D. Nam si haberet, parallelæ essent F D, C A [b], quod hypothesi contrarium esset. Duarum igitur B F, B D altera alterâ major est, datâ, quam in ratione. In B F, si opus sit productâ, capiatur F H datæ illi æqualis, quâ B F major vel minor est quam in ratione (auferenda scilicet ipsi B F si major sit, adjicienda si minor, quam in ratione.) Ratio igitur B D ad B H data. Angulus autem A B C datus. Triangulum igitur D B H
[c] 41. dat. specie datum [c]. Angulus igitur D H B, seu D H F datus. Rectæ autem F H, F D magnitudine datæ. Ratio igitur F H ad F D data. Triangulum igitur D F H spe-
[d] 44. dat. cie datum [d]. Angulus igitur D F H datus, et in triangulo B D F angulus B F D datus. Datus autem F B D,
[e] ex hyp. propter rectas B C, B A positione datas [e]. Quare et ter-
[f] 40. dat. tius B D F datus, et triangulum specie datum [f]. Sed latus F D magnitudine [e]. Quare reliqua latera B F, B D
[g] 2. dat. magnitudine singulatim data [g]. Sed et positione, punctumque B datum. Data sunt igitur puncta F, D, rectaque F D positione data. *Q. E. I.*

COMPOSITIO.

Datæ sint magnitudine rectæ *e d*, *d f*. Ducenda est recta, cujus segmenta, lateribus trianguli ABC productis intercepta, æqualia sint datis *e d*, *d f*. Capiatur *eo*, ad quam *e d* rationem habeat, quam B C ad B A. Fiat A B ad B K, ut

e o

e o ad *ef*; et jungatur A K. Basi *df* constituatur circuli segmentum *fbd*, quod angulum capiat angulo A K B æqualem. Segmento inscribatur recta *fb* rectæ C K æqualis. Et a puncto A in rectam B C deducatur A L in angulo A L K angulo *dfb* æquali. Sumatur B D, ad quam B A rationem habeat, quam A L ad *fd*. Per D ducatur E D F rectæ A L parallela, quæ A B, B C in punctis E, F occurrat. Recta E F problemati satisfaciet, utpote cujus segmenta E D, D F datis *ed*, *df* sunt æqualia.



DEMONSTRATIO.

Propter rectas A L, D F parallelas erit A L : D F = B A : B D [f].

Sed B A : B D = A L : *df* [g].

Ergo A L : D F = A L : *df* [h].

Unde D F datæ *df* æqualis erit. Per D agantur D H, D G, rectis A K, B C parallelæ. Itaque propter parallelas D H, A K, angulus D H F angulo A K B est æqualis. Junctâ autem *bd*, angulus *fbd* eidem angulo A K B est æqualis [g]. Angulus igitur D H F angulo *dbf* æqualis est. Sed propter parallelas D F, A L, angulus D F H angulo A L K æqualis est [i], qui factus est æqualis angulo *dfb*. In triangulis igitur D F H, *dfb* anguli duo D H F, D F H duobus *dbf*, *dfb*, singulatim sunt æquales. Quapropter tertius F D H tertio *fdb* est æqualis, et triangula inter se similia, et latus D F ad latus F H, ut latus *df* ad latus *fb*. Sunt autem D F, *df* inter se æqualia; id enim ostensum. Quare F H, *fb* inter se æqualia. Sed recta *fb* æqualis est rectæ C K [g]. Quare F H, C K inter se æquales. Ac propterea C F æqualis est ipsi K H. C F igitur ad A D eandem habet ac K H rationem. Sed propter parallelas D H, A K, est K H ad A D, ut K B ad B A [k]. Et K B est ad B A, ut *fe* ad *eo* [g]. Et *fe* ad *eo* rationem habet ex rationibus *fe* ad *ed*, et *ed* ad *eo* compositam [l]. Habet igitur C F ad A D rationem ex ratione *fe* ad *ed*, et *ed* ad *eo* compositam [h]. Ratio autem

[f] Cor. * 2. sexti.

[g] Per construct.

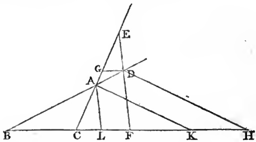
[h] 11. quinti.

[i] 29. primi.

[k] 2. sexti.

[l] Def. 5. sexti.

tem *e d* ad *e o* eadem eſt, quæ B C ad B A. Quæ igitur compoſita eſt ex rationibus *f e* ad *e d*, et *e d* ad *e o*, eadem eſt, quæ componitur ex rationibus *f e* ad *e d*, et C B ad B A. Habet igitur C F ad A D rationem ex rationibus *f e* ad *e d*, et C B ad B A compoſitam.



Cæterum ratio C F ad A D compoſita eſt ex rationibus C F ad G D, et G D ad A D. Sed propter G D, B C parallelas, ratio C F ad G D eadem eſt, quæ F E ad E D; et ratio G D ad A D eadem eſt, quæ C B ad B A[1]. Quæ igitur compoſita eſt ex rationibus C F ad G D, et G D ad A D, eadem eſt, quæ ex rationibus F E ad E D, et C B ad B A eſt compoſita. Habet igitur C F ad A D rationem ex rationibus F E ad E D, et C B ad B A compoſitam. Eadem autem C F ad A D ratio ex rationibus *f e* ad *e d*, et C B ad B A oſtenſa eſt componi. Quæ componitur igitur ex rationibus F E ad E D, et C B ad B A eadem eſt, quæ ex ratione *f e* ad *e d* cum eâdem illâ C B ad B A compoſita eſt ratio. Quapropter ablatâ communi illâ C B ad B A ratione, eadem erit F E ad E D quæ *f e* ad *e d* ratio. Et dividendo, F D ad D E ut *f d* ad *d e*. Sed F D oſtenſa eſt æqualis datæ *f d*. Quare et D E alteri datæ *d e* eſt æqualis. *Q. E. D.*

[1] Cor. 2. ſexti.

SCHOLION.

In hujuſmodi demonſtrationibus, vel conficiendis, vel tradendis, quæ rationum multarum collatione conſtant, multum facilitatis et lucis afferunt characteres Algebraici, modo Geometrice quis iis utatur; eatenus ſcilicet adhibitis, quatenus mera enthymemata Geometrica oculis ſubjiciant, ſenſu tam manifeſto ut ex nullâ operatione Algebraicâ petendus ſit.

Exemplo ſit hæc ipſa demonſtratio, cujus pars poſterior, oſtenſâ ſcilicet æqualitate rectarum C F, K H, breviſſime

breviffime et luculenter admodum hâc ratione proferri potuiffet.

Quare CF : AD = KH : AD[m]. [m] 7. quinti.

Sed KH : AD = KB : BA (propter parallelas DH, AK.)

Et KB : BA = $fe : eo$[n]. [n] Per conftruct.

Et $fe : eo = fe : ed + ed : eo$[o] †. [o] Def. 5. fexti.

Quare CF : AD = $fe : ed + ed : eo$[p]. [p] 11. quinti.

Sed $ed : eo$ = BC : BA[n].

Quare $fe : ed + ed : eo = fe : ed$ + BC : BA.

Eft igitur CF : AD = $fe : ed$ + BC : BA[p].

Sed CF : AD = CF : GD + GD : AD = FE : ED + CB : BA.

Quare $fe : ed$ + BC : BA = FE : ED + CB : BA.

Ablatâque communi BC : BA, erit $fe : ed$ = FE : ED.

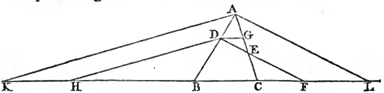
Dividendo FD : DE = $fd : de$.

Sed FD = fd (id enim fupra oftenfum eft.)

Quare DE = de. *Q. E. D.*

EPITAGMA II.

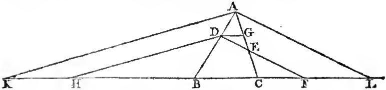
Secundo, eo modo ducenda fit recta, ut uni tantum e trianguli lateribus producto occurrat, reliquis duobus inter apices trianguli.



Factum puta. Recta fcilicet DF, quæ lateri BC producto in puncto F occurrit, reliquis duobus AB, AC, inter apices trianguli in punctis D, E, fegmenta habeat lateribus intercepta, ED, DF datæ utrumque magnitudinis. Ducatur per D, ut in priori epitagmate, recta DG ipfi BC parallela, quæ rectæ AC in G occurrat. Propter rectas DG, BC parallelas, erit CF ad DG ut FE ad ED; et DA ad DG, ut AB ad BC[q]. Datarum autem FE, ED ratio data[r]. Ratio igitur CF ad DG data. Rurfum datarum AB, BC ratio data. Ratio igitur DA ad DG data. Duæ igitur CF, AD datam inter fe [q] Cor. 2. fexti. [r] 1. dat.

† *Nempe hoc modo defignari folent rationes ex rationibus compofitæ.* A : B = C : D + E : F. *Senfus eft, ratio* A *ad* B *compofita eft ex rationibus* C *ad* D *et* E *ad* F.

rationem



r 8. dat. rationem habent[r]. Harum autem alteri, CF, additur data quædam BC; altera, AD, datæ AB aufertur. Summa igitur BF una cum consequente, ad quam reliqua BD datam rationem habet, data est[s]. Huic datæ æqualis ponatur FH. Itaque BH ea erit, ad quam BD datam rationem habet. Angulus autem DBH datus. Triangulum igitur DBH specie datum[t]. Angulus igitur BHD, sive FHD, datus. Datarum autem DF, FH ratio data. Triangulum igitur FDH specie datum[u]. Angulus igitur DFH, sive DFB, datus. Et in triangulo BDF, angulus DBF datus. Quare et tertius BDF datus, et triangulum specie datum. Sed latus FD magnitudine[x]. Quare et reliqua latera BF, BD magnitudine data. Sed et positione, punctumque B datum. Data igitur sunt puncta D, F. Quare recta FD positione data. *Q. E. I.*

s 21. dat.

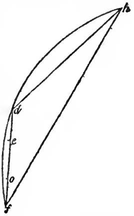
t 41. dat.

u 45. dat.

x ex hyp.

COMPOSITIO.

Sint fd, de datæ rectæ, quibus segmenta ducendæ rectæ facienda sunt æqualia. Capiatur eo, ad quam ed rationem habeat, quam CB ad BA. Fiat AB ad BK, ut eo ad ef; et jungatur AK. Super basi df constituatur segmentum circuli, quod capiat angulum angulo AKB æqualem. Segmento inscribatur recta fb rectæ CK æqualis. A puncto A in rectam BC deducatur AL in angulo ALC ipsi dfb æquali. Sumatur BD, ad quam BA rationem habeat, quam AL ad df. Per D ducatur DF rectæ AL parallela, quæ rectis BC, AE in punctis F, L occurrat. Recta DF problemati



satisfaciet,

ſatisfaciet, utpote cujus ſegmenta DE, DF datis *de*, *df* ſunt æqualia. *Q. E. I.*

DEMONSTRATIO.

DF, *df*, ut in ſuperiori epitagmate, oſtendentur æquales. Actiſque DG, DH rectis BC, AK parallelis, junctâque *db*, oſtendentur, ut prius, triangula FDH, *fdb* inter ſe ſimilia; unde efficietur FH æqualis ipſi CK. Quare et FC ipſi KH æqualis. Eſt igitur $CF : AD = KH : AD = KB : BA : ef : eo$ (omnia ut prius.)

Sed $ef : eo = ef : ed + ed : eo$.

Quare $CF : AD = ef : ed + ed : eo = ef : ed + CB : BA$, ut prius.

Sed $CF : AD = CF : GD + GD : AD = FE : ED + BC : BA$.

Quare $FE : ED + BC : BA = fe : ed + BC : BA$.

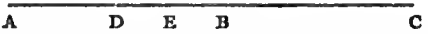
Quare ablatâ communi $BC : BA$, erit $FE : ED = fe : ed$.

Et componendo $FD : DE = fd : de$.

Sed $FD = fd$. Quare $DE = de$. *Q. E. D.*

LEMMA.

Si linea recta AC, in puncto B utcunque diviſa, iterum dividatur utcunque in puncto D, punctorum A, B intermedio, et intervallum punctorum ſectionis, DB,



medium dividatur in puncto E; dico ſpatium, quo quadratum ex totâ AC ſuperat quadrata ex ſegmentis AD, BC ſimul ſumpta, rectangulorum $AB \times BC$, $AE \times DB$ duplum eſſe.

Quod ſi punctum D duorum B, C intermedium ſit, illud, quo quadratum ex AC ſuperat quadrata ex AD, BC



ſimul ſumpta, vel ab illis ſuperatur, rectangulorum $AB \times BC$, $AE \times DB$ differentiæ duplum erit.

CAS. I. Spatium $AC^2 - BC^2 = AB^2 + 2\,AB \times BC$[r]. r 74. ſecundi.
Auferatur AD^2. Spatium igitur $AC^2 - BC^2 - AD^2 = AB^2 - AD^2 + 2\,AB \times BC$. Sed quoniam DB media dividitur

A D E B C

dividitur in E, idcirco $DE = EB$. Quapropter ſpatium
* 8. fecundi. $AB^2 - AD^2 = 4AE \times ED^2$. Et $4AE \times ED = 2AE \times 2ED = 2AE \times DB$. Spatium igitur $AC^2 - BC^2 - AD^2 = 2AE \times BD + 2AB \times BC$. *Q. E. D.*

CAS. 2. In caſu ſecundo puncti D, ſectionis ſecundæ, punctis C, B intermedii, ſpatium $AC^2 - BC^2 = AB^2 + 2AB \times BC$, ut prius. Quod ſi quadratum ex AC

A B E D C

duobus quadratis ex BC et AD ſimul ſumptis majus ſit; ſpatio $AC^2 - BC^2$, et ejus æquali $AB^2 + 2AB \times BC$ auferri poteſt quadratum ex AD. Auferatur, et relinquetur ſpatium $AC^2 - BC^2 - AD^2$ reliquo $2AB \times BC + AB^2 - AD^2$ æquale. Sed ut prius $DE = EB$. Quare $AD^2 = 4AE \times ED + AB^2 = 2AE \times DB + AB^2$. Spatium igitur $2AB \times BC + AB^2 - AD^2 = 2AB \times BC - 2AE \times DB$. Eidem autem $2AB \times BC + AB^2 - AD^2$ illud $AC^2 - BC^2 - AD^2$ oſtenſum eſt æquale. Spatium igitur $AC^2 - BC^2 - AD^2 = 2AB \times BC - 2AE \times DB$.

Quod ſi duo quadrata, AD^2, BC^2, ſimul ſumpta quadrato ex AC majora ſint, quadratis ex AD, BC ſimul ſumptis auferri poteſt quadratum ex AC. Vel, quod

A B E D C

perinde eſt, quadrato ex AD auferri poteſt ſpatium $AC^2 - BC^2$, ſeu $AB^2 + 2AB \times BC$. Auferatur; relinquetur igitur $AD^2 - AB^2 - 2AB \times BC = AD^2 + BC^2 - AC^2$. Sed cum BD media dividatur in E, erit $BE = ED$, ut prius. Quare $AD^2 - AB^2 = 4AE \times EB^2 = 2AE \times DB$. Spatium igitur $AD^2 + BC^2 - AC^2 = 2AE \times DB - 2AB \times BC$. Puncto igitur D punctis B, C interpoſito, illud, quo quadratum ex totâ AC ſuperat quadrata ex AD, BC ſimul ſumpta, vel ab illis ſuperatur, rectangulorum $AB \times BC$, $AE \times DB$ differentiæ duplum eſt. *Q. E. D.*

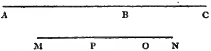
PROP.

PROBL. IV.

Lineâ rectâ magnitudine et poſitione datâ, aliam invenire, quæ ſi datæ addita fuerit, tota dato plus poſſit additâ quam in ratione.

Detur recta A B magnitudine et poſitione. Data ſit ratio rectæ M N ad N O, et ſit s datum ſpatium. Invenienda eſt recta, quæ ſi datæ A B addita fuerit, tota dato ſpatio s plus poſſit additâ, quam in ratione M N ad N O.

Factum puta, inventâ ſcilicet B C, in rectâ A B productâ, ejus longitudinis, ut quadratum ex A C ſpatio s



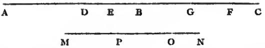
majus ſit, quam ut habeat ad quadratum ex B C rationem eam, quam M N ad N O. Vel ut $AC^2 - s$ ad BC^2 rationem habeat, quam M N ad N O.

CAS. I. Si datum ſpatium s æquale ſit quadrato ex A B, ſpatium $AC^2 - s$ rectangulo $2AB \times BC$ cum quadrato ex B C æquale erit. Erit igitur $2AB \times BC + BC^2 : BC^2 = MN : NO$. In hoc igitur caſu neceſſe eſt data ratio M N ad N O majoris ſit ad minorem. Et dividendo, $2AB \times BC$ ad BC^2 datam habebit rationem; eam ſcilicet, quam M O ad O N. Sed $2AB \times BC : BC^2 = 2AB : BC$[b]. Ratio igitur 2 A B ad B C data. Unde et ip- [b] 1. ſexti.
ſius A B ad B C ratio data. Data autem A B magnitudine. Quare B C magnitudine etiam data[c]. Sed po- [c] 2. dat.
ſitione etiam, punctumque B datum. Datum igitur punctum C[d]. *Q. E. I.* [d] 27. dat.

COMPOSITIO CAS. I.

Media dividatur recta M O in P. In A B productâ capiatur B C, ad quam A B rationem habeat eam, quam P O ad O N. Recta B C problemati in hoc caſu ſatisfacit.

Sed datum ſpatium s quadrato ex datâ A B non ſit Vide fig.
æquale. Rectæ A C auferatur A D, cujus quadratum Pag. ſeq.
ſpatio s æquale ſit. Magnitudine igitur data eſt A D. Sed poſitione etiam, punctumque A datum. Datum igitur punctum D. Dabitur etiam B D, datarum A B, A D differentia[e]; quæ ſi media dividatur in puncto E, punctum [e] 4. dat.
ipſum E dabitur. Et cum quadratum ex A D ſpatio s



æquale fit, fpatium A C^2 — A D^2 ad B C^2 datam rationem habebit, quam M N ad N O.

Spatium autem S quadrato ex A B, cui æquale non eft, aut minus erit, aut majus. Primum minus fit.

CAS. 2. In hoc igitur cafu neceffe eft data ratio M N ad N O majoris ad minorem fit. Cum enim fpatium S, feu quadratum ex A D, quadrato ex A B minus fit, fpatium A C^2 — A D^2 majus erit fpatio A C^2 — A B^2, quod ipfum quadrato ex B C majus eft[f]. Spatium igitur A C^2 — A D^2 quadrato ex B C multo majus. Et cum A C^2 — A D^2 ad B C^2 datam rationem habet, quam M N ad N O; dividendo A C^2 — A D^2 — B C^2 ad B C^2 datam habet rationem, quam M O ad O N. Sed cum quadratum ex A D minus eft quadrato ex A B, recta etiam A D rectâ A B minor. Punctum igitur D punctis A, B intermedium eft. Spatium igitur A C^2 — A D^2 — B C^2 = 2 A E × B D + 2 A B × B C[g]. Data igitur eft ratio 2 A E × B D + 2 A B × B C ad quadratum ex B C, ea nimirum, quæ eft M O ad O N. Quare data etiam ratio A E × B D + A B × B C ad quadratum ex B C[h], ea nimirum, quæ eft $\frac{1}{2}$ M O ad O N. In A B producta capiantur B F, B G, ad quas A B, A E eandem illam datam rationem habeant. Manifeftum eft B F, B G magnitudine datas effe[i], punctaque F, G data[k]. Et cum fit A B : B F = $\frac{1}{2}$ M O : O N;

erit A B × B C ad B F × B C = $\frac{1}{2}$ M O : O N[l].

Similiter, cum fit A E : B G = $\frac{1}{2}$ M O : O N;

erit A E × B D : B G × B D = $\frac{1}{2}$ M O : O N[l].

Quare A B × B C + A E × B D : B F × B C + B G × B D = $\frac{1}{2}$ M O : O N[m].

Sed $\frac{1}{2}$ M O : O N = A B × B C + A E × B D : B C^2 [n].

Eft igitur A B × B C + A E × B D : B F × B C + B G × B D = A B × B C + A E × B D : B C^2.

Quare B F × B C + B G × B D = B C^2; id eft, rectangula duo B F × B C, B G × B D, fimul fumpta, quadrato ex B C funt æqualia. Ablatoque communi B F × B C, rectangulum B G × B D, æquale erit ei, quo quadratum ex B C fuperat rectangulum B F × B C, hoc eft, rectangulo B C × C F. Rectangulum autem B G × B D

[f] 4. fecundi.
[g] Lemma Caf. 1.
[h] 8. dat.
[i] 2. dat.
[k] 27. dat.
[l] 1. fexti.
[m] 11. et 12. quinti.
[n] Id enim oftenfum.

BD datum, propter rectas BG, BD magnitudine ſingulatim datas. Datum igitur rectangulum $BC \times CF$. Data autem recta BF magnitudine et poſitione. Punctum igitur C datum [m]. Unde recta BC magnitudine et poſitione data. *Q. E. I.* [m] Cor.* 59. dat.

COMPOSITIO CAS. II.

Ope Prop. 14[æ] ſecundi conſtituatur quadratum dato ſpatio rectilineari S æquale. Rectæ AB auferatur AD, quæ lateri hujus quadrati æqualis ſit. Media dividatur DB in puncto E. Media dividatur etiam MO in P. In AB productâ capiatur BP, ad quam AB, et BG, ad quam AE, rationem habeat, quam PO ad ON. Ad rectam BF applicetur rectangulum rectangulo $BG \times BD$ æquale, cum exceſſu quadrati [n]. Latitudo exceſſûs ſit FC. Recta BC problemati ſatisfacit. *Q. E. F.* Vide fig. Pag. præc. [n] 29. ſexti.

Sed majus ſit ſpatium S quam quadratum ex AB. Data ratio vel æqualium erit, vel minoris ad majorem, vel majoris ad minorem.

CAS. 3. Primum, æqualium ſit data ratio. Spatium igitur $AC^2 - AD^2 = BC^2$. Sed $BC^2 = AC^2 - AB^2 - 2AB \times BC$ [o]. Illud igitur, quo quadratum ex AC exſuperat quadratum ex AD, æquale eſt ei, quo idem quadratum ex AC exſuperat quadratum ex AB cum duplo [o] 4. ſecundi.



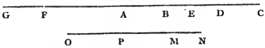
rectangulo $AB \times BC$. Quadratum igitur ex AD quadrato ex AB cum duplo rectangulo $AB \times BC$ eſt æquale. Ablatoque quadrato ex AB, ſpatium $AD^2 - AB^2$, quod rectangulum eſt $4 AE \times ED$ [p], ſive $2 AE \times DB$, rectangulo $2 AB \times BC$ æquale erit. Rectangulum igitur $AE \times DB$ rectangulo $AB \times BC$ æquale. Datum autem $AE \times DB$, propter rectas AE, DB magnitudine ſingulatim datas. Datum igitur $AB \times BC$. Data autem recta AB magnitudine. Quare BC magnitudine data [q]. Sed poſitione etiam, punctumque B datum. Datum igitur punctum C. *Q. E. D.* [p] 8. ſecundi. [q] 57. dat.

COMPOSITIO CAS. III.

Quadratum, ut prius, conſtituatur dato ſpatio rectilineari S æquale. In rectâ AB productâ capiatur AD, quæ lateri hujus quadrati æqualis ſit. Media dividatur

B D. Capiatur B C, ad quam B D rationem habeat, quam A B ad A E. Recta B C problemati ſatiſfacit.

CAS. 4. Majore exiſtente ſpatio S quam quadratum ex A B, ſit data ratio M N ad N O minoris ad majorem. Cum igitur ſpatium $AC^2 - AD^2$ ad quadratum ex B C



datam rationem habeat rectæ M N ad N O, quæ minoris eſt ad majorem; invertendo et convertendo quadratum ex B C ad ſpatium $BC^2 + AD^2 - AC^2$ datam rationem habet, quam N O ad O M. Sed cum quadratum ex A D majus ſit quadrato ex A B, recta A D major erit quam A B, et punctum D punctis B, C intermedium erit. Spatium igitur $BC^2 + AD^2 - AC^2 = 2AE \times DB - 2AB \times BC$ [r]. Data igitur eſt ratio quadrati ex B C ad $2AE \times DB - 2AB \times BC$; ea ſcilicet, quæ eſt N O ad O M. Quadrati igitur ex B C ad $AE \times DB - AB \times BC$ ratio data; ea ſcilicet, quæ eſt N O ad $\frac{1}{2}$ O M. Invertendo ratio $AE \times DB - AB \times BC$ ad quadratum ex B C data; ea ſcilicet, quæ eſt $\frac{1}{2}$ M O ad O N. In A B, ab A retrorſum actâ, capiantur B F, B G, ad quas A B, A E datam illam rationem habeant. Manifeſtum eſt, ut in caſu ſecundo, B F, B G magnitudine datas eſſe, punctaque F, G data.

[r] Lemma Caſ. 2.

Jam, cum ſit $AB : BF = \frac{1}{2} MO : ON$;
erit $AB \times BC : BF \times BC = \frac{1}{2} MO : ON$ [s].
Similiter oſtendetur $AE \times DB : BG \times BD = \frac{1}{2} MO : ON$.
Erit igitur $AE \times DB - AB \times BC : BG \times BD - BF \times BC = \frac{1}{2} MO : ON$ [t].
Sed $\frac{1}{2} MO : ON = AE \times DB - AB \times BC : BC^2$.
Erit igitur $AE \times DB - AB \times BC : BG \times BD - BF \times BC = AE \times BD - AB \times BC : BC^2$.

[s] 1. ſexti.

[t] 11. et 19. quinti.

Quare $BG \times BD - BF \times BC = BC^2$; hoc eſt, illud, quo rectangulum $BG \times BD$ ſuperat rectangulum $BF \times BC$, quadrato ex B C æquale. Addito igitur $BF \times BC$, rectangulum $BG \times BD$ rectangulo $BF \times BC$ una cum quadrato ex B C, hoc eſt, rectangulo $FC \times CB$ æquale eſt [u]. Sed datum eſt rectangulum $BG \times BD$, propter rectas B G, B D magnitudine ſingulatim datas. Rectangulum igitur $FC \times CB$ magnitudine datum. Recta autem F B magnitudine et poſitione data. Punctum igitur

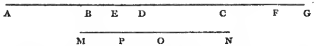
[u] 3. ſecundi.

igitur C datum [x]. Unde recta B C, ut prius, magnitudine et positione data. *Q. E. I.* [x] Cor.* 59. dat.

COMPOSITIO CAS. IV.

In rectâ A B productâ capiatur, ut prius, recta A D, quæ possit spatium datum S. Media dividatur B D in puncto E, necnon M O in P. In rectâ A B retrorsum actâ capiatur B F, ad quam A B, et B G, ad quam A E, rationem habeat, quam P O ad O N. Ad rectam F B applicetur rectangulum rectangulo G B × B D æquale cum excessu quadrati. Latitudo excessûs esto B C. Recta B C problemati satisfaciet.

CAS. 5. Sed majore existente spatio S quam quadratum ex A B, sit data ratio M N ad N O majoris ad minorem. Quoniam igitur spatium $AC^2 - AD^2$ sit ad



quadratum ex B C, ut major M N ad minorem N O; dividendo erit $AC^2 - AD^2 - BC^2$ ad BC^2, ut M O ad O N. Sed puncto D punctis B, C interjecto; spatium $AC^2 - AD^2 - BC^2$ æquale erit spatio $2\,AB \times BC - 2\,AE \times BD$ [y]. Spatium igitur $2\,AB \times BC - 2\,AE \times BD$ [y] ad BC^2 datam rationem habet, quam M O ad O N. Quare $AB \times BC - AE \times BD$ ad BC^2 datam rationem habet, quam $\frac{1}{2}$ M O ad O N. Si igitur in A B productâ sumantur B F, B G, ad quas A B, A E datam illam rationem habeant, quam $\frac{1}{2}$ M O ad O N; similibus argumentis ac in superioribus usi sumus efficietur, spatium $BF \times BC - BG \times BD$ quadrato ex B C æquale esse. Addito igitur rectangulo $BG \times BD$, erit rectangulum $BF \times BC$ quadrato ex B C una cum rectangulo $BG \times BD$ æquale. Ablatoque quadrato ex B C, erit illud, quo $BF \times BC$ superat quadratum ex B C, hoc est, rectangulum $BC \times CF$ rectangulo $BG \times BD$ æquale. Datum autem rectangulum $BG \times BD$, ut in superioribus. Rectangulum igitur $BC \times CF$ datum. Data autem recta B F magnitudine et positione, punctumque B datum. Datum igitur punctum C, applicando ad rectam B F, magnitudine et positione datam, datum rectangulum cum defectu quadrati [z]. Datum autem punctum B. Recta igitur B C magnitudine et positione data. *Q. E. F.*

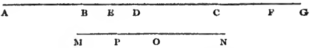
[y] Lemma Cas. 2.

[z] Cor.* 58. dat.

 DIORIS-

DIORISMUS.

Ad compofitionem hujus cafûs requiritur, ut quadratum ex dimidiâ F B non fit minus quam rectangulum G B × B D. Quadratum igitur ex F B non minus erit



quam 4 G B × B D. Sed cum B F fit ad A B, ut B G ad A E; erit quadratum ex B F ad rectangulum B F × A B, ut G B × B D ad A E × B D. Et permutando quadratum ex B F ad G B × B D, ut B F × A B ad A E × B D. Quare quadratum ex B F ad 4 G B × B D, ut A B × B F ad 4 A E × B D. Rectangulum igitur A B × B F non minus erit quam 4 A E × B D. Quapropter A B non minor quam ut habeat ad B D rationem, quam 4 A E ad B F.

Sed O N : $\frac{1}{2}$ M O = B F : A B.

Quare A B × O N non minus quam ut fit ad $\frac{1}{2}$ M O × B D, ut 4 A E ad A B.

Neque 2 A B × O N minus quam ut fit ad M O × B D, ut 4 A E ad A B.

Neque A B × O N minus quam ut fit ad M O × B D, ut 2 A E ad A B.

Rectangulum igitur A B × O N non minus quam ut fit ad M O × B D, ut 2 A E × A B ad A B².

Permutando O N non minor quam ut fit ad 2 A E, ut M O × B D ad A B².

Neque igitur O N × D B minus quam ut fit ad 2 A E × D B, ut M O × B D ad A B².

Permutando O N non minor quam ut fit ad M O, ut 2 A E × D B ad A B².

8.fecundi. Sed 2 A E × D B = A D² — A B² γ.

Quare O N non minor quam ut fit ad M O, ut A D² — A B² : A B².

Invertendo M O non major quam ut fit ad O N, ut A B² : A D² — A B².

Et componendo M N non major quam ut fit ad N O, ut A D² ad A D² — A B².

Dato igitur fpatio S, cui quadratum ex A D eft æquale, rationi M N ad N O non licebit effe majori quam eft ea, quam fpatium datum S habet ad S — A B². Contra,

tra, datâ ratione M N ad N O, ſpatio S non majori eſſe licebit quam quod habeat ad AB^2 rationem eam, quam M N ad M O.

Nam ſi major quam M N habeat ad N O rationem eam, quam S ad $S - AB^2$; M N ad minorem quam N O erit, ut S ad $S - AB^2$.

Convertendo M N ad majorem quam M O, ut S ad AB^2. Ut M N ad M O ſit T ad AB^2.

Cum igitur $MO : MN = AB^2 : T$;

et M N ad majorem quam $MO = S : AB^2$,

Ex æquo perturbate M O erit ad majorem quam M O S ad T [z]. S igitur minus quam T. [z] 23. quinti.

SCHOLION.

In limitibus hujuſcemodi explorandis, qui ex magnitudinum rationibus omnino pendent, non diſſimulandum eſt præſtantiſſimum eſſe Algebræ uſum: cum leviori multum negotio, et majori perſpicuitate ex Algebrâ derivandi ſint, quam ſine artis illius adminiculo. Quod neſcio an melius declarandum ſit quam hujuſce problematis exemplo. Ponatur enim $AB = a$. $AE = b$. $DB = d$. $BF = f$. $BG = g$. Et data ratio majoris ad minorem m ad n. Cum igitur ad compoſitionem problematis in hoc caſu neceſſe ſit, ut gd majus non ſit quam $\frac{1}{4}f^2$, idcirco $4gd$ non majus erit quam f^2. Ponatur igitur f^2 minimæ ſui quantitati $4gd$ æqualis. Sive $f^2 = 4gd$. Vel cum f ſit ad g, ut a ad b; $af = 4bd$. Sed $f = \frac{2n}{m-n}a$. Quare $\frac{2n}{m-n}a^2 = 4bd$, et $\frac{n}{m-n}a^2 = 2bd$. Et $a^2 = \frac{m-n}{n}2bd$. Et dividendo per $2bd$, $\frac{a^2}{2bd} = \frac{m-n}{n}$. Et ſi f^2 majus ponatur ſui minimo;

erit $\frac{a^2}{2bd}$ majus quam $\frac{m-n}{n}$.

Quare $m - n : n$ major eſſe nequit quam $a^2 : 2bd$. Qui, dato AD^2, ſeu S, rationis eſt dioriſmus.

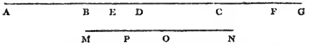
Contra propter $\frac{n}{m-n}a^2 = 2bd$, dividendo per a^2, $\frac{n}{m-n} = \frac{2bd}{a^2}$. Quod ſi f^2 majus ponatur ſui minimo,

 erit

erit $\frac{n}{m - n}$ major quam $\frac{2\,b\,d}{a^2}$. Quare $2\,b\,d : a^2$, ſive $2\,AE \times BD : AB^2$, ſive $AD^2 - AB^2 : AB^2$ non major quam NO : MO. Componendo AD^2 non majus quam ut habeat ad AB^2 rationem eam, quam MN ad MO. Qui, datâ ratione MN ad NO, ſpatii dioriſmus eſt.

COMPOSITIO CAS. V.

Dato ſpatio S majore quam quadratum ex A, detur ratio majoris MN ad minorem NO, quæ major non ſit quam ratio ſpatii S ad illud, quo ſpatium S exſuperat



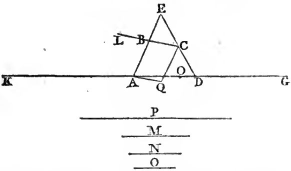
quadratum ex AB. Vel datâ ratione majoris MN ad minorem NO, detur ſpatium S, quod majus ſit quam quadratum ex AB, neque tamen majus eo, quod habeat ad quadratum ex AB rationem eam, quam MN ad MO. In AB productâ capiatur AD, quæ poſſit ſpatium S. Media dividatur BD in puncto E, et MO in puncto P. In AB productâ capiatur BF, ad quam AB, et BG, ad quam AE rationem habeat, quam PO ad ON. Ad rectam BF applicetur rectangulum rectangulo $BG \times BD$ æquale, eum defectu quadrati. Latitudo defectûs ſit FC. Recta BC problemati ſatisfacit.

PROBL. V. (Arithmet. Univ. xviii.)

Super rectam infinitam poſitione datam trapezium conſtituere datis angulis, areâ, et perimetro.

Detur poſitione recta infinita KG, ſuper quam trapezium conſtituendum eſt datis angulis, areâ, et perimetro. Factum puta. Sit ABCD trapezium, cujus anguli ad A, B, C, D datis ſingulatim ſint æquales; area dato ſpatio, quadrato ſcilicet ex datâ M, æqualis; perimeter datæ rectæ P. Detur autem punctum A, in rectâ KG pro arbitrio ſumendum. Ex lateribus trapezii duo ſaltem oppoſita erunt non parallela: ne figura in parallelogrammum tranſeat. Sint AB, DC duo latera oppoſita non parallela. Occurrent igitur, ſi producantur. Producta in E occurrant. In rectâ infinitâ, poſitione datâ, KG, capiatur AG, perimetro trapezii æqualis, et DK æqualis perimetro trianguli AED.

Propter



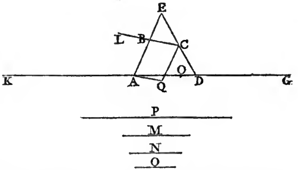
Propter angulos ad A, D datos, triangulum A E D ſpecie datum eſt[z]. Simili ratione, propter angulos ad B, et C datos, triangulum B E C ſpecie datum eſt. Sed propter triangulum A E D ſpecie datum, data eſt ratio perimetri trianguli ad latus unumquodque[a]. Ratio igitur D K ad D A data. Capiatur A O, ad quam A G eandem illam datam rationem habeat, quam D K ad D A. Ratio igitur A G ad A O data. Data autem A G datæ P æqualis[b]. Data igitur et A O[c]. Sed cum A G ſit ad A O, ut D K ad D A; erit etiam differentia duarum D K, A G ad D O, ut D K ad D A[d]. Data igitur eſt ratio differentiæ duarum D K, A G ad D O. Differentia autem duarum D K, A G ea eſt, quâ perimeter trianguli A E D exſuperat perimetrum trapezii A B C D; quæ eadem eſt, quâ B E, E C ſimul ſumptæ exſuperant B C. In C B igitur productâ capiatur C L duabus E B, E C ſimul ſumptis æqualis. Erit igitur B L duarum D K, A G differentia. Ratio igitur B L ad D O data. Sed propter triangulum B E C ſpecie datum, C L (quæ æqualis eſt duabus B E, E C ſimul ſumptis) ad B C datam rationem habet[a]. Dividendo igitur, ratio L B ad B C data[e]. Ejuſdem autem B L ad D O ratio data; id enim oſtenſum. Ratio igitur D O ad B C data[f].

[z] 40. dat.
[a] 22. dat.
[b] ex hyp.
[c] 2. dat.
[d] 19. quinti.
[e] Cor. 6. dat.
[f] 8. dat.

Sed propter triangulum A E D ſpecie datum, ratio quadrati ex A D ad triangulum A E D data eſt[g]. Sit N recta, cujus quadratum ad quadratum ex M, hoc eſt, ad trapezium A B C D, eandem illam datam rationem habeat, quam quadratum ex A D ad triangulum A E D. Quadratum igitur ex N magnitudine datum. Sed cum quadratum ex A D ad triangulum A E D eandem ratio-

[g] 49. dat.

nem

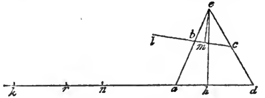


nem habeat, quam quadratum ex N ad trapezium ABCD; et illud, quo quadratum ex A D datum quadratum ex N exſuperat, ad triangulum E B C rationem habebit, quam
[g] 19. quinti. quadratum ex A D ad triangulum A E D[g]. Ejus igitur, quo quadratum ex A D exſuperat quadratum ex N, ad triangulum E B C ratio data; hoc eſt, quadratum ex A D triangulo E B C, dato quadrato ex N, majus eſt quam in ratione. Sed propter triangulum E B C ſpecie datum,
[h] 49. dat. trianguli EBC ad quadratum ex BC ratio data[h]. Quadratum igitur ex A D quadrato ex B C, dato, majus quam in
[i] Cor. * 19. dat. ratione[i]. Sed propter rationem BC ad DO datam, id enim oſtenſum; quadrati quoque ex B C ad quadratum ex D O ratio data eſt[k]. Quadratum igitur ex A D quadrato ex DO,
[k] 50. dat. dato, majus eſt quam in ratione[l]. Data autem recta AO. Rectæ igitur A O, magnitudine et poſitione datæ, additâ rectâ O D, tota A D additâ OD, dato, plus poteſt quam in
[l] Per Analyſin præc. ratione. Punctum igitur D datum[l]. Datoque ex hypotheſi puncto A, recta A D magnitudine et poſitione
[m] 26. dat. data[m]. Necnon D O. Anguli autem E A D, E D A dati[n].
[n] ex hyp. Rectæ igitur A E, D E poſitione datæ. Ratio autem D O ad B C data; id enim oſtenſum. Et D O magnitudine
[o] 2. dat. data. Quare et B C[o]. Anguli autem ad B et C dati[n]. Recta igitur B C magnitudine data duabus A E, D E poſitione datis interpoſita eſt in angulis datis. Quare
[p] Cor. * 32. dat. et ipſa B C poſitione data[p]. Puncta igitur B et C data[q].
[q] 25. dat. Sed datum A[n], et ex oſtenſis D. Quatuor igitur puncta A, B, C, D data. Trapezium igitur A B C D poſitione datum. *Q. E. I.*

COMPO-

COMPOSITIO.

Super rectam infinitam K G conſtruendum eſt trapezium, cujus anguli datis α, β, γ, δ æquales ſint, perimeter æqualis datæ rectæ P, area quadrato datæ rectæ M æqua-



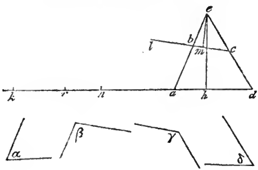


lis. Oportet autem quadratum ex M non majus eſſe quadrato ex quartâ parte rectæ P; angulos α, β, γ, δ ſimul ſumptos quatuor rectis æquales; et duos ex illis ſimul ſumptos duobus rectis minores eſſe.

Exponatur recta *a d* datæ longitudinis, pro arbitrio utique ſumendæ. Sint anguli α, δ ex datis duo, qui ſimul ſumpti duobus rectis ſunt minores. Ad puncta *a*, *d* conſtituantur anguli *d a b*, *a d c* datis α, δ ſingulatim æquales [r]. Rectæ *a b*, *d c* ſibi mutuo in *e* occurrant. In rectâ *e a* ſumatur pro arbitrio punctum *b*, et ad *b* conſtituatur angulus *a b c* dato β æqualis [r]. Tres igitur ad *a*, *d*, *b* tribus α, δ, β æquales ſunt. Quadrilateri autem *a b c d* anguli quatuor quatuor rectis ſunt æquales [s]. Et quatuor dati, α, β, γ, δ æquales ſunt quatuor rectis [t]. Quatuor igitur anguli quadrilateri *a b c d* quatuor datis α, β, γ, δ ſunt æquales. Et tres ad *a*, *b*, *d* tribus α, β, δ. Quare et quartus quadrilateri ad *c* quarto datorum γ eſt æqualis.

[r] 23. primi.
[s] Theor. 1. ad Prop. 32. primi.
[t] ex hyp.

In rectâ *d a* productâ capiatur *a k*, duabus *a e*, *d e* ſimul ſumptis æqualis. In rectâ K G ſumatur pro arbitrio punctum A. Et capiatur A G datæ P æqualis. Etiam A O, ad quam A G rationem habeat, quam *k d* ad *d a*. In *c b* productâ capiatur *c l* duabus *b e*, *c e* ſimul ſumptis æqualis. A puncto *e* in rectas *a d*, *b c* ad perpendiculum



pendiculum deducantur *e b*, *e m*. Capiatur *a n*, ad quam *e b* rationem habeat, quam *e m* ad *c b*. Capiatur etiam *d r*, ad quam *k d* rationem habeat, quam *l b* ad *b c*. Inveniatur recta O, ad quam M rationem habeat, quam $\frac{1}{2}$ *e b* ad *a d*. Et duarum M, O capiatur N proportione media. In A O producta inveniatur punctum D, quod efficiat, ut quadratum ex A D quadrato ex D O, dato quadrato ex N, majus sit, quam in ratione quadrati ex *d r* ·

• 4. hujus. ad rectangulum $a\,n \times a\,d$[s]. Tum ad puncta A, D, constituantur anguli D A E, A D E, datis α, δ, seu illis *a*, *d*, singulatim æquales. Ad rectam etiam A B, ad punctum ejus A, applicetur angulus E A Q supplemento

ᵗ 23. primi. dati β, seu angulo *e b c* æqualis[t]. In recta A Q capia-

ᵘ 12. fexti. tur A Q, ad quam D O rationem habeat, quam *a d* ad *d r*[u].

ˣ 31. primi. Per Q agatur recta Q C ipsi A E parallela[x], quæ rectæ D E in C occurrat. Per C agatur C B illi A Q parallela, quæ occurrat ipsi A E in B. Ita effectum fuerit, quod fieri oportuit. Namque trapezium A B C D angulos A, B, C, D habebit datis α, β, γ, δ æquales, aream æqualem quadrato ex M, et perimetrum æqualem datæ P. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Angulos A, B, C, D datis æquales esse, triangula quoque E A D, E B C triangulis *e a d*, *e b c* esse similia; hæc ex constructione manifesta sunt. Cæterum cum D O sit

ʸ Ita enim factum. ad A Q, ut *a d* ad *d r*[y], erit et quadratum ex D O ad quadratum ex A Q, ut quadratum ex *a d* ad quadratum ex

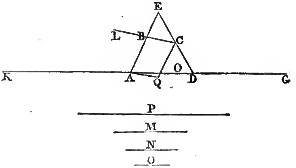
ᶻ 22. fexti. *d r*[z]. Sed quadratum ex A Q æquale est quadrato ex B C. Nimirum cum rectæ A Q, B C, opposita parallelogrammi

grammi latera, ipsæ sint inter se æquales[y]. Quadratum igitur ex D O ad quadratum ex B C rationem habet, quam quadratum ex $a\,d$ ad quadratum ex $d\,r$; hoc est, [y] 34. primi.

$DO^2 : BC^2 = ad^2 : dr^2$.

Sed $AD^2 - N^2 : DO^2 = dr^2 : an \times ad^z$. [z] Ita enim factum.

Ex æquo igitur perturbate $AD^2 - N^2 : BC^2 = ad^2 : an \times ad = ad : an^a$. Sed propter triangula E B C, $e\,b\,ç$ inter se similia, quadratum ex B C erit ad triangulum E B C, ut quadratum ex $b\,c$ ad triangulum $e\,b\,c$, hoc est, ut $b\,c$ ad $\frac{1}{2}\,e\,m$. Sed $b\,c$ est ad $e\,m$, ut $a\,n$ ad $e\,b^z$. Quare $b\,c$ erit ad $\frac{1}{2}\,e\,m$, ut $a\,n$ ad $\frac{1}{2}\,e\,b$. Quadratum igitur ex B C ad triangulum E B C rationem habet, quam $a\,n$ ad $\frac{1}{2}\,e\,b$. [a] 23. quinti.



Quapropter cum sit $AD^2 - N^2 : BC^2 = ad : an$.

Et $BC^2 : EBC = an : \frac{1}{2}\,eb$.

Erit ex æquo $AD^2 - N^2 : EBC = ad : \frac{1}{2}\,eb$.

Sed $N^2 : M^2 = O : M = ad : \frac{1}{2}\,eb^z$.

Quare $AD^2 : EBC + M^2 = ad : \frac{1}{2}\,eb^b$. [b] 12. quinti.

Sed $ad : \frac{1}{2}\,eb = ad^2 : aed$.

Et propter triangula A E D, $a\,e\,d$ inter se similia, $AD^2 : AED = ad^2 : aed$.

Quadratum igitur ex A D ad triangulum A E D eandem rationem habet, quam quadratum ex A D ad triangulum E B C cum quadrato ex M[c]. Triangulum igitur A E D æquale est triangulo E B C et quadrato ex M simul sumptis[d]. Verum idem triangulum A E D triangulo E B C cum trapezio A B C D æquale est. Triangulum igitur $EBC +$ trapez. $ABCD = EBC + M^2$. Ablatoque triangulo E B C, trapezium A B C D quadrato ex M æquale est. Quod primum demonstrandum erat. [c] 11. quinti. [d] 9. quinti.

Dico

Dico etiam perimetrum trapezii A B C D rectæ P æqualem esse. Perimeter illa, quæcunque fuerit, dicatur T. Et capiatur D K perimetro trianguli A E D æqualis. Et in C B productâ capiatur C L duabus E B, E C simul sumptis æqualis. Et propter triangula E B C, *e b c* inter se similia, erit L C : C B = *l c* : *c b*.

[d] Ita enim factum.

Dividendo igitur L B : B C = *l b* : *b c* = *k d* : *d r*[d].

Sed B C : D O = *d r* : *a d*[d].

Ex æquo igitur L B : D O = *k d* : *a d*.

Sed L B = K D − T. Id enim ostensum in analysi.

Erit igitur K D − T : D O = *k d* : *a d*.

Sed propter triangula A E D, *a e d* inter se similia, erit K D : A D = *k d* : *a d*.

[e] 11. quinti.

Quare K D : D A = K D−T : D O[e].

Permutando K D : K D − T = D A : D O.

Convertendo K D : T = D A : A O.

Permutando K D : D A = T : A O.

[f] Ostensum enim.

Sed K D : D A = *k d* : *d a*[f].

[g] Factum enim.

Et *k d* : *d a* = G A : A O[g].

Quare T : A O = G A : A O[e].

[h] 9. quinti.

[i] Per construct.

Recta igitur T, seu perimeter trapezii, æqualis est rectæ G A[h], et G A rectæ P æqualis est[i]. Perimeter igitur trapezii datæ rectæ P æqualis est. *Q. E. D.*

SCHOLION.

Quinque horum Problematum, primum et secundum, tertium item cum ultimo, ex iis sunt, quæ Newtonus, artis Algebraicæ vires ostentans, in Arithmeticâ suâ Universali Algebraice resoluta dedit. Resolutiones autem illas Newtoni Algebraicas cum hisce nostris Geometricis si quis contulerit, is demum, ut opinor, sentiet, Analyticês, quâ veteres usi sunt, quanta sit præstantia. In Algebrâ illud maxime vitiosum est, quod concinnatâ æquatione, vel etiam reductâ, quânam ratione Problemati Geometrice satisfaciendum sit, quærendum nihilominus restat. Quandoquidem eorum, quæ in ultimâ æquatione datorum formam præ se ferunt, constructionem Geometrice concinnare, longe majoris plerumque opus est vel artis vel ingenii, quam quod ultimo quæsitum est Algebraice eruere, ex simpliciter, ut ita dicam, datis. Simpliciter autem dico, quæ in statu quæstionis data sunt. Exemplo sit de Trapezio Problema, eorum quæ Geometria plana habet ex difficillimis unum, quod nobis

nobis quintum, Newtono eorum, quæ in Arithmeticâ Universali, decimum octavum. Hujus constructionem haud inconcinnam, constructionis demonstrationem luculentam Veterum Analysis nobis suppeditavit. Newtonus ad Algebraicam problematis resolutionem, rectas nostri diagrammatis A B, B C, literis x et y designari jubet. Datas autem rationes B C ad C E et B E eas ponit, quas data quædam d ad datas e et f habet. Datas item A E ad D A et D E rationes eas ponit, quas data quædam g ad datas b et d habet. Datamque perimetrum ponit a. Datam præterea quadrati ex B C ad triangulum B C E rationem ponit eam, quæ est datæ m ad datam n. Datam quadrati ex D E ad triangulum A D E, eam, quæ datæ m ad d. Datamque aream ponit $b\,b$. His ita præparatis, sponte quasi enascuntur æquationes duæ duarum incognitarum, x et y; et alterâ x exterminatâ, alterius y multâ arte conficitur tandem æquatio quadratica; quam, primo quivis intuitu, constructione facillimam fore judicaverit, cum revera sit difficilis. Est autem hæc

$$yy - 2\,t\,y = t\,v. \quad \text{Seu } y - 2\,t \times y = t\,v.$$

Si igitur ad datam rectam $2\,t$ applicetur datum rectangulum $t\,v$ cum excessu quadrati, latitudo excessûs erit illa ipsa, quæ quæritur, y. Verum recta illa t, et rectangulum $t\,v$ quomodo data sunt, vel quânam ratione inveniantur; siquidem neutrum horum certissime in eorum numero sit, quæ simpliciter data sunt? Algebraicâ quidem, et numerosâ exegesi, nihil facilius. Quali autem constructione exhiberi possint si rogas, nulla sane ex symbolis æquationum elicienda est, quæ non sit res maximi laboris. Literæ enim illæ t, v inter operandum substitutæ sunt pro multinomiis Algebraicis; vel, ut verius dicam, pro factis ex multinomiis, multiplicatione et divisione mutuâ inter se componendis. Primum enim, homogeneum comparationis, $t\,v$, illud est, quod venit ex binomio $b\,b\,m - \frac{d\,r\,r\,a\,a}{p\,p}$ per quadrinomium $\frac{d\,q\,q}{p\,p} - \frac{2\,f\,q}{p} - \frac{f\,f}{d} - n$ diviso. Tum coefficiens t venit ex binomio alio, $\frac{a\,d\,q\,r}{p\,p} - \frac{a\,f\,r}{p}$, per idem quadrinomium diviso. Quinetiam in binomiis illis et in quadri-

quadrinomio literæ p, q, r, quantitates haud ſimplices ſignificant, vel quæ ſunt in ſimpliciter datis, ſed ex illis multimodâ rurſum compoſitione factas. Namque $\frac{p}{r}$ ſubſtituta eſt pro trinomio $1 + \frac{d}{g} + \frac{d}{b}$; et $\frac{q}{r}$ pro quadrinomio $1 + \frac{f}{g} + \frac{f}{b} - \frac{e}{d}$. Et hiſce ſubſtituendi præſtigiis comparata eſt omnis illa, quæ ultimæ æquationi ineſt, falſa omnino et fallax ſimplicitatis ſpecies.

Illud etiam animadvertiſſe non inutile erit: Newtonum in hoc problemate, ut in aliis, multa adhibuiſſe ad calculum promovendum quæ ex intimâ Geometriâ ei petita ſunt. Quod ſi aliter egiſſet, major ei ſubeundus eſſet calculorum labor, et æquatio ultima intractabilior prodiiſſet. Ut vel uno hoc exemplo intelligendum ſit, quam præpoſterum revera et perverſum ſit illud magiſtrorum præceptum, cujus ſupra meminimus, cum jubent Geometricis neglectis, ad prima et ſimpliciſſima principia revocare omnia. Quaſi ad ſubtillima Geometriæ problemata, præter notionem illam quam maxime communem, totum ſuis partibus æquari, et auream quam in puerorum ſcholis vocant regulam, aliaſque trivialis Arithmetices operationes, nihil amplius deſideraretur. Inſulſi plane homines et deridendi, utut magnifice ſeſe efferant, cum modo ipſorum Algebrâ quis inſtructus fuerit, vel ipſius quadrageſimæ ſeptimæ primi levem futuram fuiſſe jacturam exiſtimant, ſi mortalibus nunquam innotuiſſet. De iſtiuſmodi deliramentis interea, quid revera ſtatuendum eſt, ediſcat aliquis vel primi noſtri problematis exemplo, quod Newtono in Arithmeticâ Univerſali decimum quintum eſt; ſi noſtra ſcilicet reſolutio Geometrica cum priori earum, quas duas Newtonus tradidit, conferatur. Ubi æquatio quæ primum prodit ſummo artifici, ſpeciem triangulo conſulto diſſimulanti, ad octavam dimenſionem incognitæ x aſcendit, ope autem diviſoris compoſiti in biquadraticam deprimitur, et biquadratica radicem extrahendo in quadraticam. Hæc autem Newtonus vires Algebræ, ſicut diximus, oſtentans, et conſiliis iis, quibus Librum de Arithmeticâ Univerſali edere conſtituit, ſolummodo obtem-

obtemperans. Non quod indoctam illam, impeditam et caliginosam indaginis viam præ aliâ omni insistendam esse judicavit. Cum e contrario methodum aliam et audaciorem ipse ut plurimum usurpaverit, et nulla non subsidia sibi ex Geometriâ de industriâ conquisiverit. Quinetiam multa vel in ipso illo Arithmeticês Universalis libro Geometrice resoluta dedit, neglectis omnino et posthabitis, quæ tamen facile ei adhibere licuit, omnibus artis Algebraicæ, quotquot sunt, adminiculis.

FINIS PARTIS PRIMÆ.

SPHÆRICORUM

LIBER SINGULARIS

EX PRIMO FERE ET SECUNDO

SPHÆRICORUM THEODOSII.

STUDIO ATQUE OPERA

SAMUELIS EPISCOPI ASAPHENSIS.

SPHÆRICORUM

LIBER SINGULARIS.

DEFINITIONES.

Definitio I.

SPHÆRA eſt figura ſolida unâ ſuperficie comprehenſa, ad quam ſuperficiem, a puncto quodam intra figuram quotquot extenſæ ſint rectæ lineæ ſunt inter ſe æquales.

II.

Centrum ſphæræ eſt punctum illud.

III.

Axis vero ſphæræ eſt recta quædam linea, per centrum ducta, et utrinque ad ſphæræ ſuperficiem terminata, circa quam manentem Sphæra convertitur.

IV.

Poli ſphæræ ſunt ipſius axis termini.

V.

Polus circuli in ſphærâ eſt punctum in ſuperficie ſphæræ, a quo omnes rectæ lineæ, in circuli peripheriam deductæ, inter ſe ſunt æquales.

VI.

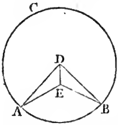
Circuli in ſphærâ ſe mutuo contingere dicuntur, quando communis planorum interſectio utrumque circulum contingat.

PROPOSITIO I. THEOREMA.

Si sphærica superficies plano aliquo secetur, linea, quæ fit in sphæræ superficie, est circuli peripheria.

Secetur enim plano aliquo sphærica superficies, faciatque in superficie sphæræ lineam A B C: dico lineam A B C esse peripheriam circuli.

CAS. 1. Si enim planum illud, quod secat sphæram, per sphæræ centrum trajicitur, manifestum est lineam A B C esse peripheriam circuli: rectæ enim lineæ, quæ a sphæræ centro ad superficiem ducuntur, inter se æquales sunt (1. Def. hujus) atqui linea A B C est in sphæræ superficie (ex hyp.) lineæ ergo rectæ, quæ a centro sphæræ ad lineam A B C ducuntur, sunt inter se æquales: sed positum est planum A B C per sphæræ centrum trajici: ergo linea A B C est peripheria circuli, cujus centrum idem est cum sphæræ centro.



Cor. Casûs 1. Atque hinc patet, idem esse sphæræ centrum, et circuli per sphæræ centrum trajecti.

CAS. 2. At planum illud, quod sphæram secat, non ducatur per sphæræ centrum; sitque centrum sphæræ punctum D; et a puncto D, ad planum quod sphæram secat, ducatur ad perpendiculum D E (11. xi.) quæ plano occurrat in puncto E: et a puncto E, ad lineam A B C, ducantur rectæ lineæ E A et E B, junganturque rectæ D A et D B.

Cum ergo recta A D æqualis sit rectæ D B: quadrato vero quod fit ex A D æqualia sint quadrata duo quæ fiunt ex A E et E D: quadrato autem quod fit ex D B æqualia sint quadrata quæ fiunt ex B E et E D (47. i.) uterque enim angulorum ad E rectus est: duo igitur quadrata quæ fiunt ex A E, E D æqualia sunt duobus quadratis quæ fiunt ex B E, E D: auferatur commune quadratum quod fit ex D E: æquale igitur est quadratum factum ex E A quadrato facto ex E B, atque idcirco recta

recta E A æqualis est rectæ E B. Eodem modo ostendemus, omnes rectas, ductas a puncto E ad lineam A B C, æquales inter se esse.

Linea igitur A B C est peripheria circuli, cujus centrum est E. *Q. E. D.*

Cor. Casûs 2. Atque hinc constat fore, ut si in sphærâ sit circulus; recta, a centro sphæræ in planum circuli ad perpendiculum deducta, incidet in centrum circuli.

Cor 1. Recta linea sphæricam superficiem in punctis plus duobus non secat. Et quæ duo quævis puncta superficiei sphæricæ conjungit linea recta, ea intra superficiem cadit.

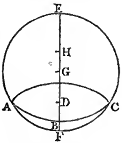
Cor. 2. Circuli sphæræ duo punctis plus duobus in sphæricâ superficie sibi invicem non occurrunt. Nam si in tribus occurrant, tria illa erunt ad communem planorum intersectionem. Linea igitur recta, quæ communis est planorum intersectio, superficiei sphæricæ in tribus punctis occurrit. Quod fieri nequit.

PROP. II. PROBL.

Datæ sphæræ centrum invenire.

Sit data sphæra quælibet; oportet ejus centrum invenire.

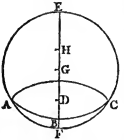
Secetur sphæra data plano aliquo: planum, secando, circulum faciet. Faciat A B C, cujus circuli A B C centrum sumatur D; et a puncto D, ad perpendiculum cum plano circuli A B C, educatur recta D E; quæ producta superficiei sphæricæ in punctis E, F occurrat. Media dividatur recta E F in puncto G. Dico punctum G datæ sphæræ centrum esse.



Non enim; sed si fieri potest, sit aliud punctum H, centrum sphæræ datæ. Juncta H D plano A B C, ad perpendiculum erit (Cor. Caf. 2. i. hujus.) Sed recta E D F, ad perpendiculum est plano A B C (ex construct.) Punctum

 igitur

igitur H ad rectam E F: ne duæ rectæ eidem plano ad idem punctum ad perpendiculum insistant. Recta igitur E F, sphæræ diameter erit, et in puncto H, centro sphæræ, media dividetur. Sed in puncto G media dividitur recta E F (per construct.) In utroque igitur punctorum, G et H, recta E F media dividitur: quod est absurdum. Punctum igitur H non est centrum sphæræ. Similiter ostendemus nec aliud ullum præter G.



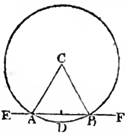
Quare punctum G est centrum sphæræ A B C. Inventum est igitur centrum sphæræ. *Q. E. F.*

Cor. Hinc constat, si in sphærâ sit circulus, a centro autem ipsius excitetur recta linea ad perpendiculum cum circuli plano, in lineâ excitatâ centrum esse sphæræ.

PROP. III. THEOR.

Sphæra planum, a quo non secatur, punctis plus uno non contingit.

Si enim fieri potest, sphæra planum, a quo non secatur, tangat in punctis duobus A et B, sumaturque (2. hujus) centrum ipsius sphæræ, quod sit punctum C: et jungantur rectæ A C, B C: et producatur planum per lineas A C et B C trajectum: quod sectionem efficiet in sphæræ superficie (1. hujus) peripheriam circuli; in plano autem sphæram contingente lineam rectam. Faciat ergo in sphæræ quidem superficie circulum D A B: in plano autem, rectam E A B F.



Quoniam igitur planum quoddam non secat sphæram, est autem in sphæræ superficie circulus D A B, in plano autem non secante recta E A B F; ergo recta linea E A B F non secat ipsum D A B circulum: cum ergo, in ipsius D A B circuli peripheriâ, sumpta sint duo quælibet puncta

A et

A et B; linea recta, ducta a puncto A in punctum B, cadet (2. iii.) intra ipſum D A B circulum: ſed extra etiam, quod fieri non poteſt.

Sphæra ergo planum, a quo non ſecatur, in unico tantum puncto contingit. *Q. E. D.*

Cor. 1. Superficies ſphærica lineam rectam, a quâ non ſecatur, in unico tantum puncto continget. Et, ad utraſque partes puncti contactûs, recta extra ſuperficiem cadet.

Cor. 2. Linea recta, quæ circulum ſphæræ aliquem, in cujus plano eſt, contingit, in ipſo contactûs puncto ſuperficiem ſphericam continget. Secando enim ſuperficiem, circuli peripheriam ſecaret.

Cor. 3. Si linea recta ſuperficiem ſphæricam in puncto aliquo contingat; eadem recta, in eodem puncto, circulorum ſphæræ omnium peripherias continget, quorum plana per rectam illam tranſeunt.

Quamlibet enim ex peripheriis ſecando, ſphæram ſecaret.

Cor. 4. Si duæ rectæ ſuperficiem ſphæricam in uno eodemque puncto contingant, planum per rectas ſuperficiem ſphæricam, in eodem puncto, continget.

Secat enim, ſi non contingat. Secando, circulum in ſuperficie effecerit, quem utique duæ illæ rectæ contingent in eodem puncto (per præc.) Quod eſt abſurdum.

Cor. 5. Si duæ rectæ circulos ſphæræ duos, in ſuperficie ſphericâ ſibi mutuo occurrentes, altera alterum in ipſo mutui occurſûs puncto contingant; planum per rectas in eodem puncto ſuperficiem ſphæricam continget.

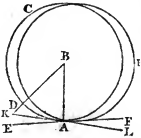
Manifeſtum eſt ex præcedenti; quoniam utraque recta, circulum ſphæræ contingendo, ſuperficiem ſphæræ contigerit (per Cor. 2.)

PROP. IV. THEOR.

Si ſphæra planum, a quo non ſecatur, contingat; recta linea, a centro ſphæræ ad contactum ducta, plano ad perpendiculum erit. Et ſi planum ſuperficiei ſphæræ in puncto aliquo occurrat, rectaque, a centro ſphæræ ad punctum occurſûs ducta, ad perpendiculum ſit plano; planum illud ſuperficiem ſphæricam in puncto occurſûs continget.

Sphæra enim planum, quod ipſam non ſecet, tangat in puncto A, ſumaturque centrum ſphæræ (2. hujus) punctum B videlicet, jungaturque recta B A: dico lineam B A ad perpendiculum eſſe plano, quod ſphæram tangit in puncto A.

Extendatur enim planum per lineam A B: quod planum, ſecando, circulum efficiet in ſuperficie ſphæricâ, in plano autem contingente lineam rectam: faciat igitur in ſphæræ quidem ſuperficie circulum A C D; in plano autem contingente, rectam E A F: rurſum, per eandem lineam A B extendatur aliud planum, quod ſectionem faciat in ſphæræ quidem ſuperficie circulum A H; in plano autem contingente, rectam lineam K A L.



Cum ergo planum E K F L tangat ſphæram, recta E A F tangit circulum A C D (3. Cor. præc.) quia ergo recta quædam linea E A F tangit circulum A C D in puncto A: a puncto autem A ad centrum circuli ducta eſt recta A B: igitur recta A B ad perpendiculum eſt rectæ E A F (18. iii.) conſtat autem punctum B centrum eſſe ipſius A C D circuli (Cor. Caſ. I. i. hujus) cum planum ejuſdem A C D circuli extendatur per lineam B A, quæ eſt e centro ſphæræ: eodem modo oſtendemus lineam B A ad perpendiculum eſſe rectæ K A L. Cum itaque B A, duabus lineis E F et K L ſe mutuo ſecantibus, in communi earum ſectione ad angulos rectos inſiſtat; recta B A ad angulos rectos erit illi plano, quod per ipſas E F et K L trajicitur (4. xi.) planum autem, quod per ipſas E F et K L rectas lineas trajicitur, eſt planum illud quod ſphæram tangit.

Quare

Quare recta A B ad perpendiculum est plano quod sphæram tangit. Quod primum erat demonstrandum.

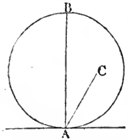
Jam vero planum E L F K superficiei sphæræ, cujus centrum B, in puncto A occurrat. Junctaque B A ad perpendiculum sit plano E L F K. Dico planum illud sphæram contingere in puncto A.

In plano enim E L F K capiatur punctum quodlibet K. Jungantur B K, K A. Angulus B A K rectus (per 3. Def. xi.) Propter angulum B A K rectum, recta B K major est quam B A. B A autem semidiameter est sphæræ. Major igitur B K, quam semidiameter sphæræ, cum punctum ipsum B sphæræ centrum sit. Punctum igitur K, extra sphæram. Simili modo et aliud omne punctum plani E L F K, præter ipsum A, ostendetur extra sphæram esse. Planum igitur E L F K, superficiem sphæricam in puncto A contingit. Quod alterum erat demonstrandum.

PROP. V. THEOR.

Si sphæra planum tangat, quod ipsam non secat, a contactu autem excitetur recta linea ad angulos rectos ipsi plano, in lineâ excitatâ erit centrum sphæræ.

Sphæra enim planum aliquod, a quo non secatur, tangat in puncto A; et a puncto A excitetur recta linea A B ad angulos rectos ipsi plano: dico centrum sphæræ esse in lineâ A B.



Non enim: sed, si fieri potest, sit centrum sphæræ punctum C; et jungatur recta C A.

Quia ergo sphæra planum, a quo non secatur, tangit in puncto A, a centro autem sphæræ ad contactum ducta est recta linea C A; recta C A est (4. hujus) ad angulos rectos ipsi plano: est vero etiam B A ad angulos rectos ipsi plano (ex Hyp.) ergo ab eodem puncto A, duæ rectæ lineæ excitatæ sunt A B et A C ad angulos rectos eidem subjecto plano, quod fieri non potest (13. xi.) igitur punctum C non est centrum sphæræ: eodem modo ostendemus nullum punctum extra lineam B A esse centrum sphæræ.

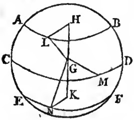
Quare centrum sphæræ est in lineâ B A. *Q. E. D.*

Cor. Duo plana ſuperficiem ſphæræ non contingunt in eodem puncto.

PROP. VI. THEOR.

Circulorum, qui in ſphærâ ſunt, maximi ſunt qui per ſphæræ centrum ducuntur: aliorum autem, illi inter ſe æquales ſunt, qui æqualiter a centro diſtant: qui vero longius a centro diſtant, minores ſunt. Et e converſo circulorum, qui in ſphærâ ſunt, maximi per centrum tranſeunt; aliorum autem, qui ſunt inter ſe æquales æqualiter a centro diſtant; minores autem, longius a centro abſunt quam majores.

Sint in ſphærâ circuli A B, C D, E F: quorum C D ducatur per centrum ſphæræ: duo autem A B et E F primum quidem æqualiter a centro diſtent[a]: dico circulum C D eſſe maximum: circulos autem A B et E F eſſe inter ſe æquales.



Sumatur enim ſphæræ centrum, punctum nempe G (2. hujus) quod circuli etiam C D centrum erit (Cor. Caſ. 1. i. hujus.) A puncto G, in plana circulorum A B, E F, ad perpendiculum deducantur G H, G K; quæ planis illis in punctis H, K occurrant. Puncta igitur H, K, ſunt centra circulorum A B, E F (Cor. Caſ. 2. i. hujus.) Producantur a punctis H, G, K, ad peripherias rectæ lineæ H L, G M, K N, et jungantur G L, G N.

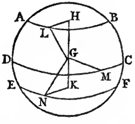
Et quia linea G H recta eſt ad planum ipſius A B circuli, ergo ad omnes lineas ipſam G H tangentes et jacentes in plano ipſius A B circuli, rectos angulos facit (3. Def. xi.) ipſam autem tangit recta H L poſita in plano circuli A B: angulus igitur L H G rectus eſt: eodem modo oſtendemus rectum eſſe angulum G K N: cum itaque rectus ſit angulus G H L, angulus L G H minor eſt recto (17. i.) major ergo eſt angulus L H G angulo L G H: quare latus L G majus eſt latere L H (19. i.)

[a] Circuli a centro ſphæræ diſtantia ipſa eſt centrorum diſtantia; ſeu linea recta centrum ſphæræ et centrum circuli conjungens.

eſt

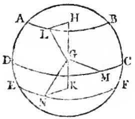
eſt autem recta L G æqualis rectæ G M, eo quod punctum G eſt centrum ſphæræ, et ab eo in ſphæræ ſuperficiem ductæ ſunt lineæ rectæ L G, G M: igitur linea G M eſt major quam linea L H: eſt autem linea G M ſemidiameter circuli C D: linea autem L H ſemidiameter circuli A B: major igitur eſt circulus C D circulo A B: eodem modo oſtendemus circulum C D majorem eſſe quolibet alio circulo per ſphæræ centrum non trajecto. Dico etiam æquales inter ſe eſſe circulos A B, E F: quia enim æqualiter diſtant a centro ſphæræ ipſi A B, E F circuli; æqualis igitur eſt G H ipſi G K: et quia punctum G eſt centrum ſphæræ, æqualis eſt linea G L ipſi G N: quare quadratum quod fit ex G L æquale eſt quadrato quod fit ex G N: ſed quadrato quod fit ex G L æqualia ſunt quadrata quæ fiunt ex H L et G H (47. i.) quadrato autem quod fit ex G N æqualia ſunt quadrata ex K N et G K: igitur quadrata, quæ fiunt ex H L et G H, æqualia ſunt quadratis, quæ fiunt ex K N et G K: quorum illud, quod fit ex G H, æquale eſt ei quod fit ex G K: reliquum igitur quod fit ex H L æquale eſt ei quod fit ex K N: quare æqualis eſt H L ipſi K N: eſt autem ipſa H L ſemidiameter circuli A B: linea autem K N ſemidiameter circuli E F: igitur ſemidiameter circuli A B æqualis eſt ſemidiametro circuli E F: atque ideo æqualis eſt A B circulus circulo E F.

Sed circulus A B longius diſtet a centro ſphæræ quam circulus E F: dico circulum A B minorem eſſe circulo E F: Manente enim eâdem conſtructione, quia circulus A B



longius diſtat a centro ſphæræ quam circulus E F: idcirco recta G H major eſt quam recta G K: item quia recta G L æqualis eſt rectæ G N; punctum enim G eſt ſphæræ centrum, puncta vero L et N ſunt ad ſphæræ ſuperficiem: idcirco quadratum quod fit ex G L æquale eſt quadrato facto ex G N; id eſt, quadrata, quæ fiunt ex G H et H L, æqualia ſunt quadratis quæ fiunt ex G K et K N: quorum illud quod fit ex G H majus eſt eo quod fit ex K G: reliquum igitur quod fit ex H L minus eſt reliquo quod fit ex K N: quare recta L H minor eſt quam recta N K: ſed

fed recta H L eft femidiameter circuli A B: recta autem K N eft femidiameter circuli E F: circulus ergo A B minor eft circulo E F.



Quocirca circulorum qui in fphærâ funt, hi qui per fphæræ centrum trajiciuntur, maximi funt: reliquorum autem æquales inter fe funt qui æqualiter diftant a centro fphæræ: qui vero longius diftant minores funt.

Dico jam e converfo circulorum in fphærâ maximos tranfire per centrum fphæræ; aliorum autem æquales quidem æqualiter diftare a centro, minores vero longius abeffe a centro quam majores.

Iifdem enim conftructis fit C D circulus maximus: dico C D circulum tranfire per fphæræ centrum.

Si enim fieri poffit, non tranfeat per fphæræ centrum: quia ergo oftenfum eft circulum, per fphæræ centrum, majorem effe quolibet non per centrum; fi quis circulus per fphæræ centrum ducatur, ille major erit circulo C D. Quare C D circulus non erit maximus, quod eft abfurdum: eft enim maximus ex hypothefi: ergo C D circulus maximus per fphæræ centrum tranfit.

Jam vero fint circuli A B et E F inter fe æquales: dico eos æqualiter diftare a fphæræ centro.

Æqualium enim circulorum femidiametri, H L, K N erunt inter fe æquales (1. Def. iii.) Æquales autem G L, G N, ex fphæræ centro fuperficiem ufque productæ. quinetiam quadratum quod fit ex G L æquale eft quadratis quæ fiunt ex G H, H L: et quadratum quod fit ex G N æquale eft quadratis quæ fiunt ex G K, K N. Duo igitur ex G H, H L, duobus ex G K, K N funt æqualia ablatifque æqualibus ex H L, K N, reliquum quod fit ex G H æquale erit reliquo quod fit ex G K, idque H G æqualis ipfi G K: æquales ergo circuli æqualiter diftant a centro fphæræ.

At vero fit circulus A B minor circulo E F: dico circulum A B longius diftare a centro fphæræ quam circulum E F.

Quia enim A B minor eft quam E F, igitur femidiameter

meter H L minor eſt ſemidiametro K N: item quia quadratum ex G L æquale eſt quadratis ex G H, H L: quadratum autem ex G N æquale eſt quadratis ex G K, K N: duo igitur quadrata ex G H, H L æqualia ſunt duobus quadratis ex G K, K N: quorum illud quod ex H L minus eſt illo quod ex K N: reliquum ergo quadratum ex G H majus eſt quadrato ex G K, ob idque recta G H major eſt quam recta G K.

Quocirca minores circuli longius diſtant a centro ſphæræ quam majores. *Q. E. D.*

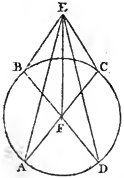
Cor. 1. Maximi omnes in ſphærâ circuli inter ſe ſunt æquales.

Cor. 2. Circulus quiſque, qui minorum eſt in ſphærâ, æqualem ſibi habet et parallelum æqualiter a centro ſphæræ, ad partes contrarias, remotum. Geminis autem hujuſmodi, æqualibus et parallelis, non datur tertius æqualis ſimul et parallelus.

PROP. VII. THEOR.

Si in ſphærâ ſit circulus, recta linea, quæ centra ſphæræ et circuli jungit, ad perpendiculum erit circuli plano.

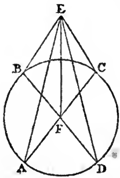
Sit in ſphærâ circulus A B C D: et centrum quidem ſphæræ ſit punctum E: centrum autem circuli ſit punctum F, et jungatur recta E F: dico rectam E F ad perpendiculum eſſe circuli, A B C D, plano.



Ducantur enim per circuli centrum rectæ lineæ A F C et B F D, et jungantur B E, E D.

In triangulis E F B, E F D, quia æquale eſt latus F B lateri F D: latus autem commune F E; duo igitur B F, F E duobus D F, F E æqualia ſunt, utrumque utrique; ſed et baſis E B baſi E D eſt æqualis, propterea quod punctum E eſt centrum ſphæræ, ad cujus ſuperficiem ſunt puncta B, D. Angulus igitur B F E æqualis eſt angulo D F E (8. i.) Cum autem recta linea rectæ lineæ inſiſtens ângulos utrinque æquales fecerit, rectus eſt uterque æqualium angulorum (10. Def. i.) Rectus igitur

igitur eſt uterque angulorum B F E et D F E: quare recta E F eſt ad angulos rectos ipſi B D: Eodem modo, junctis lineis A E et E C, oſtendemus rectam E F ad angulos rectos eſſe ipſi A C. Cum igitur recta E F, duabus rectis A C, B D, ſe mutuo ſecantibus, in communi mutuæ interſectionis puncto ad perpendiculum inſiſtat; erit illa E F ad perpendiculum duarum A C, B D plano. Planum autem duarum A C B D eſt circulus ipſe A B C D. Quare E F ad perpendiculum eſt circuli A B C D plano.

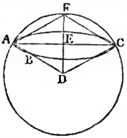


Q. E. D.

PROP. VIII. THEOR.

Si in ſphærâ ſit circulus, recta, per circuli polum et centrum ſphæræ, erit ad perpendiculum circuli plano; cui in centro circuli occurrit.

Eſto circulus ſphæræ A B C. Circuli A B C, polus ſit punctum F. Sphæræ centrum eſto D. Dico junctam D F eſſe ad perpendiculum circuli A B C plano. Occurrat enim juncta D F plano circuli A B C in puncto E. Per punctum E ducatur utcunque, in plano circuli A B C, recta A C; quæ circuli peripheriæ in punctis, A, C, occurrat. Jungantur F A, F C, D A, D C. Jam quoniam D centrum eſt ſphæræ, et puncta A, C, ad ſuperficiem; rectæ D A, D C erunt inter ſe æquales. Rurſum quoniam F polus eſt circuli A B C, rectæ F A, F C, erunt inter ſe æquales (5. Def. hujus.) Triangulorum igitur A F D, C F D, latera F A, F C, ſunt æqualia: latus autem F D commune: et baſis D A, baſi D C æqualis. Anguli igitur A F D, C F D inter ſe æquales (8. i.) In triangulis igitur A F E, C F E latera F A, F C ſunt æqualia. Latus autem F E duorum eſt commune. Et anguli A F E,



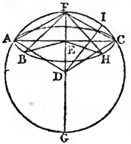
C F E,

C F E, inter se æquales. Basis igitur E A, basi E C æqualis, et anguli F E A, F E C inter se æquales (per 4. i.) Rectus igitur uterque. Recta igitur F D ad perpendiculum rectæ A C. Similiter et alii cuilibet rectæ, per punctum E in plano A B C ductæ, ostendemus ad perpendiculum esse rectam F D. Omnibus igitur, quæ in plano A B C illi occurrunt, ad perpendiculum est recta D F. Plano igitur (per 3. Def. xi.) Quare si in sphærâ sit circulus, recta, per circuli polum et centrum sphæræ, erit ad perpendiculum circuli plano. Punctum autem E ubi recta F D plano circuli A B C, occurrit, circuli A B C, centrum esse manifestum est. Nimirum cum rectæ omnes in plano circuli per E ductæ, et peripheriâ utrinque terminatæ, in puncto E mediæ dividantur. *Q. E. D.*

PROP. IX. THEOR.

Si a centro sphæræ in planum circuli cujuslibet, eorum qui in sphærâ, recta ad perpendiculum deducta utrinque producatur; puncta occursûs rectæ cum superficie sphæricâ, circuli erunt poli.

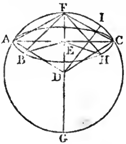
A centro sphæræ D, in planum circuli A B C ad perpendiculum deducatur recta D E; quæ, utrinque producta superficiei sphæricæ in punctis F, G occurrat. Dico puncta F, G polos esse circuli A B C.



Esto E punctum ubi recta D E plano A B C occurrit. In circuli A B C peripheriâ sumantur duo quælibet puncta A, B. Jungantur E A, E B, F A, F B.

Propter rectam D F a centro sphæræ D, in planum circuli A B C ad perpendiculum deductam, punctum E centrum est circuli A B C (per Cor. Cas. 2. i. hujus.) Rectæ igitur E A, E B, inter se æquales. In triangulis igitur F E A, F E B, latera E A, E B sunt æqualia: latus autem F E duobus est commune. Et anguli F E A, F E B, inter se æquales; rectus enim uterque. Basis igitur, F B, basi F A æqualis (per 4. i.) Simili modo si in aliud quodvis punctum peripheriæ A C, puta H, a puncto F deducatur F H; ostendetur F H illi F A æqualis. Rectæ igitur

igitur omnes, a puncto F in peripheriam circuli A B C deductæ, inter se æquales. Punctum igitur F polus est circuli A B C (5. Def. hujus.) Et similiter ostendetur punctum G circuli A B C polum esse. Quare si a centro sphæræ in planum circuli cujuslibet, eorum qui sunt in sphærâ, recta, ad perpendiculum deducta, utrinque producatur; puncta occursûs rectæ cum superficie sphæricâ circuli erunt poli.



Q. E. D.

Cor. Omnis circulus in sphærâ duos, nec plures, polos habet ex diametro oppositos.

A centro sphæræ D in planum circuli A B C, ad perpendiculum deducatur D E, quæ superficiei sphæricæ producta in punctis F, G occurrat. Puncta F, G poli erunt circuli A B C (per præc.) ex diametro utique oppositi. Si quem vero tertium circulus ille polum habeat, sit I tertius. Juncta D I ad perpendiculum erit plano circuli A B C (8. hujus.) Sed D E eidem plano ad perpendiculum est (per construct.) Rectæ igitur D I, D E, ex puncto D simul exeuntes, inter se erunt parallelæ (6. xi.) Quod est absurdum.

PROP. X. THEOR.

Recta, quæ circuli cujuslibet in sphærâ polos jungit, ad perpendiculum est circuli plano, et per centra circuli et sphæræ transit.

Si per centrum sphæræ non transeat, duci poterit a centro sphæræ ad polum alterutrum recta; cujus occursus alter cum sphæricâ superficie necessario polus alter erit (Cor. præc.) Recta igitur rectæ in duobus punctis occurret. Quod est absurdum. Transit igitur recta polos circuli conjungens, per centrum sphæræ. Est igitur ad perpendiculum circuli plano (8. hujus.) Per centrum igitur circuli transit (Cor. Cas. 2. i. hujus.) Quare recta quæ circuli cujuslibet, eorum qui in sphærâ, polos jungit, ad perpendiculum est circuli plano, et per centra circuli et sphæræ transit. *Q. E. D.*

Cor.

Cor. 1. Recta, a polo circuli alterutro in planum circuli ad perpendiculum deducta, incidet in centrum circuli, et producta per polum alterum tranſibit

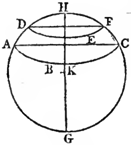
Cor. 2. Recta, a centro circuli ad perpendiculum cum plano circuli educta, ſi utrinque producatur, tranſibit per circuli polos.

Cor. 3. Punctum in ſuperficie ſphæricâ, unde in peripheriam circuli rectæ plus duabus æquales deduci poterunt, circuli polus eſt.

Nam in *Fig.* præc. ſi tres rectæ F A, F B, F H æquales ſint; a puncto F, in planum circuli A B C, deductâ ad perpendiculum rectâ F E, junctiſque E A, E B, E H; tres illæ, E A, E B, E H erunt inter ſe æquales. Punctum igitur E centrum eſt circuli A B C (9. iii.) Punctum igitur F circuli A B C polus (per Cor. præc.)

Cor. 4. In ſphærâ circuli, qui ſunt circa eoſdem polos, ſunt paralleli.

In ſphærâ circuli A B C, D E F, eoſdem habeant polos, G, H. Dico plana circulorum eſſe parallela. Juncta enim G H ad perpendiculum erit utrique plano (per hanc Prop.) Plana autem, quibus eadem recta eſt ad perpendiculum, ea ſunt inter ſe parallela (14. xi.)



Cor. 5. In ſphærâ paralleli circuli ſunt circa eoſdem polos.

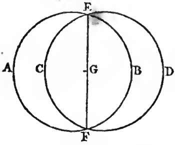
In ſphærâ cujus centrum K, ſint circuli A B C, D E F paralleli. Dico, circa eoſdem eſſe polos. Alterius enim circulorum, puta circuli A B C, ſint puncta G, H poli. Juncta H G ad perpendiculum erit plano circuli A B C, et per K centrum ſphæræ tranſibit (per hanc Prop.) Sed cum parallela ſint circulorum A B C, D E F plana (ex hyp.) recta G H, quæ ad perpendiculum eſt plano alteri A B C, alteri etiam D E F ad perpendiculum erit (Cor. 14. xi.) Recta igitur K H, a centro ſphæræ in planum circuli D E F ad perpendiculum eſt deducta. Puncta igitur, G, H, in quibus recta illa ſuperficiei ſphæricæ

ricæ occurrit, poli ſunt circuli D E F (9. hujus.) Eadem vero puncta, G, H, circuli A B C, ſunt poli (ex hyp.) Circuli igitur paralleli A B C, D E F ſunt circa eoſdem polos. *Q. E. D.*

PROP. XI. THEOR.

In ſphærâ maximi circuli ſe mutuo medios dividunt.

In ſphærâ duo maximi circuli A B, C D, ſe mutuo ſecent in punctis E, F. Dico circulos A B, C D, ſe mutuo medios dividere. Jungatur enim E F, quæ communis erit planorum A B, C D interſectio; et ſumatur centrum ſphæræ, quod ſit G. Quoniam circuli A B, C D, ſunt inter ſphæræ maximos, tranſit utriuſque planum per centrum ſphæræ (6. hujus.)



Punctum igitur G, ſphæræ centrum, erit in utriuſque plano: ad communem igitur planorum interſectionem; id eſt ad rectam E F. Centrum autem ſphæræ commune eſt circulorum omnium centrum, quorum plana per ipſum tranſeunt (Cor. Caſ. 1. i. hujus.) Punctum igitur G circulorum A B, C D centrum eſt commune. Recta igitur E F eorundem diameter communis. Utrumque igitur medium dividit. Circuli igitur A B, C D, quorum communis interſectio utriuſque eſt diameter, ſe mutuo medios dividunt. *Q. E. D.*

Cor. Circuli maximi ſe mutuo non contingunt. Duorum enim maximorum communis interſectio, cum utriuſque ſit diameter, neutrum contingit.

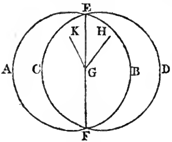
PROP.

PROP. XII. THEOR.

In ſphærâ, circuli, qui ſe mutuo medios dividunt, ſunt maximi.

In ſphærâ enim duo circuli A B, C D ſe mutuo in punctis E, F, medios dividant: dico circulos A B, C D eſſe maximos.

Juncta enim E F diameter eſt ipſorum A B, C D circulorum: media dividatur E F in puncto G: punctum igitur G eſt centrum ipſorum A B, C D circulorum: jam a puncto G excitentur duæ rectæ lineæ, altera quidem G H, quæ ad angulos rectos ſit plano ipſius C D circuli: altera autem G K, quæ ad angulos rectos ſit plano circuli A B (12. xi.)



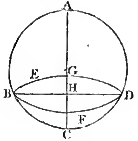
Et quia in ſphæra circulus eſt C D, et ab ejus centro G excitata eſt recta linea G H ad angulos rectos plano ipſius circuli: centrum igitur ſphæræ (Cor. Caſ. 2. i. hujus) eſt in rectâ G H. Similiter oſtendemus centrum ſphæræ eſſe in rectâ G K: igitur centrum ſphæræ eſt in communi ſectione ipſarum G H et G K: eſt autem earum communis ſectio in puncto G: quare punctum G eſt centrum ſphæræ: idem autem punctum G eſt etiam centrum ipſorum A B, C D circulorum: atqui circuli, qui habent idem centrum cum ſphærâ, ſunt maximi. (6. hujus.)

Ergo circuli in ſphærâ, qui ſe mutuo medios dividunt, ſunt maximi. *Q. E. D.*

PROP. XIII. THEOR.

Si in ſphærâ maximus circulus circulorum quempiam ad rectos angulos ſecet; et medium eum dividit, et per polos.

Sit enim in ſphærâ maximus circulus A B C D, qui eorum qui in ſphærâ ſunt circulorum aliquem ad angulos rectos ſecet, circulum E B F D nempe: dico circulum A B C D et medium dividere, et per polos ſecare, circulum E B F D.



Jungatur enim ipſorum communis ſectio B D, ſumaturque centrum circuli A B C D, quod ſit punctum G: eſt vero punctum G etiam ſphæræ centrum (6. hujus) a puncto G in rectam B D ad perpendiculum deducatur G H; productaque utrinque G H ſuperficiei ſphæræ in punctis A, C incidat.

Et quoniam duo plana ſe ad angulos rectos ſecant, planum nempe circuli A B C D, et planum circuli E B F D; quorum communi ſectioni, quæ eſt B D, ad angulos rectos in planorum altero, nempe in A B C D, ducta eſt recta H A: recta igitur A C ad perpendiculum eſt ipſi E B F D plano (4. Def. xi.) quia ergo in ſphærâ circulus eſt E B F D, a centro autem ſphæræ in ipſum circulum ad perpendiculum deducta eſt G H, quæ incidit in planum circuli E B F D in puncto H: igitur punctum H eſt centrum ipſius E B F D circuli (Cor. Caſ. 2. i. hujus) utrumque igitur ſegmentum, B E D et B F D, eſt ſemicirculus: quare circulus A B C D medium dividit circulum E B F D. Dico et per polos eum ſecare. Quia enim in ſphærâ eſt circulus E B F D, a centro autem ſphæræ G in ipſum circulum ad perpendiculum deducta eſt recta G H, quæ in utramque partem producta committitur ſuperficiei ſphæræ in punctis A, C: ſi autem in aliquem eorum qui ſunt in ſphærâ circulorum recta a centro ſphæræ ad perpendiculum deducatur, eadem, in utramque partem producta, in circuli ipſius polos incidet (9. hujus) puncta igitur A, C ſunt poli ipſius

FBFD

E B F D circuli: quare circulus A B C D secat circulum E B F D per polos: sed et medium eum dividit.

Circulus igitur A B C D circulum E B F D, et medium dividit et per polos. *Q. E. D.*

PROP. XIV. THEOR.

Si maximus quis in sphærâ circulus circulum non maximum medium dividat; ad angulos rectos eum secat, et per polos.

In sphærâ enim circulus maximus A B C D circulum aliquem eorum qui in sphærâ sunt non maximum, E B F D, medium dividat: dico fore, ut eum secet ad angulos rectos, et per polos.

Jungatur enim ipsorum circulorum communis sectio B D: et quia circulus A B C D medium dividit circulum E B F D: utrumque igitur segmentum, B E D nempe et B F D, est semicirculus: quare B D est diameter circuli E B F D: media igitur dividatur B D in puncto H: punctum igitur H est centrum circuli E B F D: sumatur centrum circuli A B C D, quod sit G. Cum vero maximus sit circulus A B C D, centrum ejus G, sphæræ etiam centrum erit (6. hujus.) Jungatur G H.

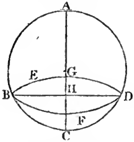
Et quia in sphærâ circulus est E B F D, a centro autem sphæræ ducta est recta linea G H ad centrum ipsius circuli: recta igitur G H ad perpendiculum est plano circuli E B F D (7. hujus) quare plana omnia trajecta per lineam G H recta sunt plano circuli E B F D (18. xi.) unum autem planorum trajectorum per G H est circulus A B C D; quare planum circuli A B C D rectum est plano circuli E B F D. Circulus igitur A B C D secat ad angulos rectos circulum E B F D. Dico præterea fore, ut eum per polos secet. Producatur enim G H in utramque partem, et peripheriæ circuli A B C D, in punctis A, C, occurrat. Et cum peripheria A B C D tota sit in superficie sphæricâ; puncta A, C, ad ipsam erunt superficiem sphæricam. Recta igitur G H a centro sphæræ G in planum circuli E B F D ad perpendiculum deducta, superficiei sphæricæ in punctis A, C occurrit. Poli igitur circuli E B F D sunt puncta A, C (9. hujus.) Circulus igitur A B C D, cum ad illius peripheriam sint puncta A, C; secat circulum E B F D per polos.

Quare circulus A B C D secat, et ad angulos rectos, et per polos, circulum E B F D. *Q. E. D.*

PROP. XV. THEOR.

Si quem eorum qui ſunt in ſphærâ circulorum maximus quis per polos ſecet; medium illum dividet, et ad perpendiculum ſecabit.

In ſphærâ enim maximus circulus A B C D eorum qui in ſphærâ ſunt circulorum aliquem E B F D per polos ſecet: dico fore, ut cum medium dividat, et ad angulos rectos ſecet.



Sunto enim puncta A, C poli ipſius E B F D circuli: manifeſtum eſt puncta A, C eſſe in circulo A B C D, eo quod circulus A B C D ſecat per polos circulum E B F D (ex hyp.) Jungatur recta A C.

Quia ergo in ſphærâ eſt circulus E B F D, per cujus polos ducitur recta A C: ſi autem ſit in ſphærâ circulus, recta linea, per circuli polos ducta, ad perpendiculum eſt circuli plano, tranſitque per centrum ipſius circuli et per centrum ſphæræ (10. hujus.) Recta igitur A C ad perpendiculum eſt plano circuli E B F D: quapropter omnia plana per lineam A C recta ſunt circuli E B F D plano (18. xi.) eſt autem planum circuli A B C D unum eorum quæ per lineam A C: planum igitur circuli A B C D rectum eſt plano circuli E B F D: quare A B C D circulus ad rectos angulos ſecat circulum E B F D. Sed maximus eſt circulus A B C D (ex hyp.) quare circulum E B F D, ad rectos ſecando, medium dividet (13. hujus.)

Circulus igitur A B C D, per polos ſecans circulum E B F D, eum et biſariam et ad angulos rectos ſecat.

Q. E. D.

Cor. Circulus ſphæræ, qui alium aliquem per cujus polum tranſeat, medium dividat, maximus erit, et ad alium illum rectus.

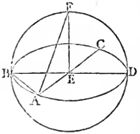
In ſphærâ cujus centrum G, circuli ſint A B C D, E B F D; quorum alterius, E B F D, ſit A polus. Alter autem A B C D, tranſeat per punctum A, et circulum E B F D, medium dividat. Dico circulum A B C D maximum eſſe, et ad planum E B F D rectum. Sumatur enim centrum

centrum circuli E B F D quod ſit H, et polus alter C. Ad rectam ſunt puncta quatuor C, H, G, A (per 10. hujus.) Quorum duo, A, H, ſunt in plano circuli A B C D (ex hyp.) Ergo et reliqua duo, G, C, ſunt in eodem plano (1. xi.) Circulus igitur A B C D, cujus planum per G, centrum ſphæræ, tranſit, maximus eſt (6. hujus.) Tranſit autem per A, C polos utique circuli E B F D. Plano igitur circuli E B F D rectus eſt (15. hujus) quem ipſe maximus per polos ſecat.

PROP. XVI. THEOR.

Si in ſphærâ ſit circulus maximus, recta linea a polo ejus in peripheriam deducta æqualis erit lateri quadrati circulo maximo inſcripti.

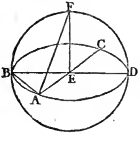
Sit in ſphærâ maximus circulus A B C D: dico lineam rectam, ab ejus polo in peripheriam ejus deductam, æqualem eſſe lateri quadrati circulo maximo A B C D inſcripti.



Ducantur enim per centrum ſphæræ atque circuli commune, quod ſit E, circuli A B C D, diametri A C, B D, ad angulos rectos ſe mutuo ſecantes; et a puncto E excitetur recta E F ad perpendiculum plano circuli A B C D (12. xi.) quæ occurrat ſuperficiei ſphæricæ in puncto F: punctum igitur F eſt polus circuli A B C D (2. Cor. x. hujus) jungantur B A, A F: B A igitur eſt latus quadrati in circulo A B C D inſcripti (6. iv.) recta autem A F eſt linea recta a polo circuli in peripheriam ejus deducta: dico ergo rectam F A æqualem eſſe rectæ A B.

Quia enim F E eſt ad rectos angulos ipſi circulo A B C D, ergo ad rectos angulos etiam erit omnibus lineis rectis ipſam tangentibus, et jacentibus in plano circuli A B C D (3. Def. xi.) quare F E eſt ad rectos angulos ſingulis ipſarum A E, B E, D E; et quia punctum E eſt centrum ſphæræ, æqualis ergo eſt E B ipſi E F: communis autem eſt E A: duæ igitur E B, E A duabus E F, E A ſunt æquales, et rectus angulus B E A æqualis eſt

recto angulo A E F: quare basis B A æqualis est basi F A (4. i.) est vero F A recta a polo circuli A B C D in ejusdem peripheriam deducta: recta autem B A latus est quadrati maximo circulo inscripti.



Recta igitur a polo circuli A B C D in ejusdem peripheriam deducta æqualis est lateri quadrati circulo maximo inscripti. *Q. E. D.*

Cor. Arcus circuli maximi, a polo in peripheriam alius maximi deductus, quadrans erit.

PROP. XVII. THEOR.

Si recta, a circuli in sphærâ polo ad peripheriam deducta, æqualis sit lateri quadrati eidem circulo inscripti, circulus ipse maximus erit.

Esto circulus in sphærâ A B C, cujus polus F. Recta F A, a polo in peripheriam deducta, lateri quadrati circulo A B C inscripti, æqualis sit. Dico circulum A B C maximum.

A polo F in planum circuli A B C deducatur ad perpendiculum recta F E, quæ plano A B C in puncto E occurrat. Punctum E, circuli A B C centrum erit (1. Cor. x. hujus.) Per centrum E ducatur diameter circuli A B C utcunque, A C; quæ peripheriæ in punctis, A, C, occurrat. Ad angulos cum A C rectos ducatur diameter alia B E D, quæ peripheriæ in punctis B, D occurrat. Jungatur B A. Planum vero rectarum F E, B D, sphæricam superficiem secando, circulum faciat B F D. Propter angulum B E A, ad centrum circuli A B C, rectum (per construct.) recta B A latus est quadrati circulo A B C inscripti. Huic igitur (ex hyp.) æqualis F A. Quadratum igitur ex F A quadrato ex B A æquale. Recta autem F E, quæ a puncto F in planum A B C ad perpendiculum est deducta, rectis omnibus, quibus occurrit, in plano A B C ad perpendiculum erit (3. Def. xi.) Angulus igitur F E A rectus. Quadratum igitur ex F A, quadratis duobus ex F E, E A simul sumptis æquale est (47. i.)

(47. i.) Sed propter angulum B E A rectum (construct.) quadratum ex B A, quadratis duobus ex E B, E A simul sumptis est æquale (47. i.) Duo igitur ex F E, E A simul sumpta, duobus ex E B, E A, simul sumptis sunt æqualia: ablatoque quadrato ex E A, quadratum ex F E æquale erit quadrato ex E B. Recta igitur F E, rectæ E B æqualis. Sed æquales sunt E B, E D; nempe cum E centrum sit circuli A B C. Tres igitur E F, E B, E D inter se æquales. Punctum igitur E centrum est circuli B F D (9. iii.) Idem vero punctum E circuli A B C centrum. Circuli igitur A B C, B F D, quibus centrum est commune E, diameter communis B E D, se mutuo medios dividunt. Maximus igitur uterque (12. hujus.) Maximus igitur A B C. *Q. E. D.*

Cor. 1. Si recta a circuli polo in planum circuli ad perpendiculum deducta semidiametro circuli æqualis sit, circulus ipse maximus erit.

Cor. 2. Circulus in sphærâ, qui maximorum non est, a polis suis inæqualiter distat [b]. Et duorum quorumlibet in sphærâ circulorum major est, qui a polo suo propiore magis distat, et a remotiore minus. Qui a polis autem æqualiter remoti sunt, æquales sunt.

Cor. 3. Si recta, a circuli in sphærâ polo in peripheriam deducta, æqualis sit lateri quadrati, maximo inscripti, circulus ipse maximus erit.

Propter inæquales enim non maximi cujusvis a polis suis distantias, semicirculus maximi, per polos oppositos non maximi transeuntis, a peripheriâ non maximi in arcus dividitur inæquales; minorem quadrante, qui polo propiore terminatur; majorem, qui remotiore; minoris autem chorda latere quadrati, maximo inscripti, minor erit; majoris, major. Nequit igitur recta a polo non maximi in peripheriam deducta lateri quadrati, maximo inscripti, æqualis esse.

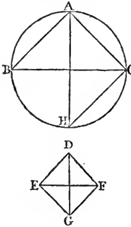
[b] Circuli sphæræ a polo proprio distantia, ipsa est centri circuli a polo distantia; sive recta linea centrum circuli et polum ejusdem conjungens. Vel, ut clarius dicam, in *Fig.* Prop. xiii. sint A, C, poli oppositi circuli B F D, cujus centrum H, existente G sphæræ centro. Jungatur A C quæ per puncta H, O, necessario transit. Rectæ A C, pars H A, distantia est circuli B F D, a polo A; pars H C, ejusdem a polo C distantia. Pars denique G H, circuli a centro sphæræ distantia. Confer not. Prop. vi.

PROP. XVIII. PROBL.

Lineam rectam describere æqualem diametro circuli cujuslibet in sphærâ dati.

Sit datus in sphærâ circulus A B C: oportet lineam rectam describere æqualem diametro ipsius A B C circuli.

Sumantur in circuli peripheriâ quælibet puncta A, B, et C, junganturque rectæ A B, B C, C A: et e tribus lineis rectis constituatur triangulum D E F (22. i.) quod habeat latus D E æquale lateri A B, latus autem E F æquale lateri B C, et latus F D æquale lateri A C: et a puncto E ducatur E G ad angulos rectos ipsi E D (11. i.) a puncto autem F ducatur F G ad angulos rectos ipsi D F, jungaturque recta D G: ducatur vero A H, quæ sit diameter circuli A B C: dico rectam D G æqualem esse rectæ A H: jungatur enim C H.



Quoniam duæ rectæ A B, B C æquales sunt duabus D E E F, utraque utrique; basis item A C æqualis est basi D F: angulus igitur A B C æqualis est angulo D E F (8. i.) sed angulus A B C æqualis est angulo A H C; et angulus D E F æqualis est angulo D G F (21. iii.) si enim super diametro D G describeretur circulus, transiret per puncta E et F, eo quod uterque ipsorum D E G et D F G angulorum rectus est: ideoque anguli D E F et D G F essent in eodem segmento, et ideo æquales: angulus igitur A H C æqualis est angulo D G F: rectus autem angulus A C H æqualis est recto angulo D F G: quare duo sunt triangula A H C et D G F, quæ duos angulos A C H et C H A duobus angulis D F G et F G D, æquales habent, utrumque utrique; unumque latus uni lateri æquale sub uno æqualium angulorum subtensum, nempe latus A C lateri D F: ideoque reliqua latera reliquis lateribus æqualia habebunt,

bunt, utrumque utrique (26. i.) recta igitur A H æqualis est rectæ D G: sed A H est diameter circuli:

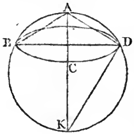
Quare D G est æqualis diametro circuli. *Q. E. F.*

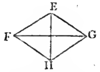
PROP. XIX. PROBL.

Lineam rectam describere æqualem diametro datæ sphæræ.

Concipiatur sphæra aliqua, cujus diametro æqualem rectam lineam assignare opportet.

Sumantur in ejusdem sphæræ superficie duo quælibet puncta, A, B; et polo quidem A, intervallo autem A B, describatur circulus B C D: diametro igitur circuli B C D æqualis exponi poterit linea recta (18. hujus.) Exponatur F G. Basi autem F G, constituatur triangulum isosceles F E G, cujus latera E F, E G, deductis a polo A in peripheriam circuli B C D sint æqualia (per 22. i.) et a punctis F et G ducantur rectæ lineæ F H et G H, quæ angulos rectos faciant cum rectis lineis E F et E G: jungatur denique recta E H: dico rectam E H æqualem esse diametro sphæræ.

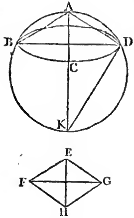




Intelligatur enim sphæræ diameter A K, polos circuli B C D conjungens, et per A K planum. Planum illud, superficiem sphæricam secando, faciet circulum, et maximum quidem illum; circulum autem B C D secando faciet rectam. Faciat in superficie sphæricâ circulum A B K D maximum; in plano circuli B C D, rectam B D. Et jungantur A B, A D.

Circulus sphæræ maximus A B K D, circulum B C D, per polos secans medium dividit (15. hujus.) Recta igitur B D diameter est circuli B C D. Rectæ igitur F G æqualis (construct.) In triangulis igitur A B D, E F G, duo latera A B, B D duobus lateribus E F, F G sunt æqualia, utrumque utrique: basis autem A D æqualis est basi E G: igitur angulus A B D æqualis est angulo E F G: sed

ſed angulus A B D æqualis eſt angulo A K D (21. iii.) angulus autem E F G æqualis eſt angulo E H G, ut oſtenſum eſt in demonſtratione præcedentis theorematis: anguli igitur A K D, E H G ſunt æquales: quinetiam A D K angulus rectus æqualis eſt recto angulo E G H: duo itaque ſunt triangula A D K et E G H, quæ habent duos angulos A D K et D K A æquales duobus angulis E G H et G H E, utrumque utrique, et unum latus uni lateri æquale, quod uni æqualium angulorum ſubtenditur, latus nempe A D lateri E G: reliqua igitur latera reliquis lateribus æqualia habebunt, utrumque utrique (26. i.) latus igitur A K æquale eſt lateri E H: ſed latus A K eſt diameter ſphæræ.



Ergo linea recta E H æqualis eſt diametro ſphæræ.

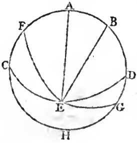
Q. E. F.

PROP. XX. PROBL.

Per duo puncta data in ſphærica ſuperficie circulum maximum deſcribere.

Data ſint duo puncta A et B in ſphæræ ſuperficie: oportet per puncta A et B deſcribere circulum maximum.

Si ergo duo illa puncta, A et B, ſint oppoſita in ſphæræ diametro; certum eſt, quam plurimos circulos maximos duci poſſe per puncta A et B: quod ſi puncta A et B non ſint in ſphæræ diametro; polo quidem A, intervallo autem tanto, quantum eſt latus quadrati in maximo circulo inſcripti, deſcribatur circulus C E D: circulus igitur C E D maximus eſt



eſt (3. Cor. 17. hujus) recta enim, quæ ex ejus polo deducitur æqualis eſt lateri quadrati maximo circulo inſcripti (ex hyp.) rurſus polo quidem B, intervallo autem tanto, quantum eſt latus quadrati in maximo circulo inſcripti, deſcribatur circulus FEG: maximus ergo eſt FEG circulus: recta enim, quæ ex ejus polo deducitur, æqualis eſt lateri quadrati maximo circulo inſcripti: jam jungantur, rectæ lineæ AE, EB.

Duarum igitur rectarum AE et EB utraque æqualis eſt lateri quadrati maximo circulo inſcripti: quocirca æqualis eſt EA ipſi EB: et ob hanc cauſam, ſi polo E, intervallo autem EB, deſcribatur circulus, tranſibit per punctum A: propterea quod recta EA æqualis eſt rectæ EB: tranſeat ergo, ſitque ille circulus ABH: igitur circulus ABH maximus eſt: recta enim, quæ ex ejus polo deducitur, æqualis eſt lateri quadrati maximo circulo inſcripti.

Ergo per duo data puncta A et B, quæ ſunt in ſuperficie ſphæricâ, deſcriptus eſt ABH maximus circulus.

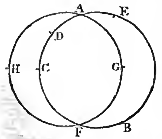
Q. E. F.

PROP. XXI. PROBL.

Cujuſlibet circuli in ſphærâ dati polum invenire.

Sit datus in ſphærâ circulus ABC: oportet circuli ABC polum invenire. Circulus ABC aut maximus erit, aut non maximus. Eſto primum non maximus.

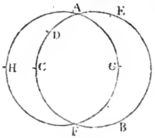
Sumatur punctum utcunque in ejus peripheriâ, quod ſit D; et accipiantur duæ peripheriæ partes æquales DA et AE; reliqua vero DBE bifariam ſecetur in puncto F (30. iii.) et per duo data puncta, F et A, quæ in ſphæricâ ſuperficie ſunt, deſcribatur maximus circulus FAH (20. hujus.)



Quoniam ergo arcus DA æqualis eſt arcui AE: eſt vero DF etiam arcus æqualis arcui FE: totus igitur ADF æqualis eſt toti AEF: quare circulus FAH medium dividit circulum ABC: quoniam igitur circulus in ſphærâ maximus

AFH

A F H alium quendam non maximum medium dividit, ad rectos eum secat et per polos (14. hujus.) quocirca circulus F H A secat ad angulos rectos, et per polos, circulum A B C. Poli igitur circuli A B C ad peripheriam sunt circuli F H A; medius igitur dividatur arcus F A in puncto G. Punctum igitur G polus erit circuli A B C.



CAS. 2. Jam vero maximus sit circulus A B C. In circuli A B C peripheriâ sumatur pro arbitrio punctum C. Polo C, intervallo latere quadrati circulo A B C inscripti, scribatur circulus in superficie sphæricâ A F H, qui circulum A B C in punctis A, F secet. Arcus æquales C A, C F erunt quadrantes, et duo simul semicirculus. Juncta igitur A F diameter erit circuli A B F maximi, ac proinde sphæræ. Circulus igitur A F H, cui inscribitur recta A F sphæræ diameter, omnino maximorum erit. Maximo vero A B C, qui per polos eum secat, ad rectos erit (15. hujus.) Maximus autem A F H, circulum A B C ad rectos secando, per polos secat (13. hujus.) Poli igitur circuli A B C erunt ad peripheriam A F. Medii igitur dividantur arcus A G F, A H F punctis G, H. Erunt G, H poli circuli A B C. *Q. E. F.*

PROP. XXII. THEOR.

Si in sphærâ recta linea per centrum aliam non per centrum mediam dividat, ad angulos rectos ipsam secabit: quod si ad angulos rectos secet, mediam quoque dividet.

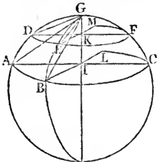
Demonstratio eadem est ac in circularibus: rectæ enim in sphærâ, altera per centrum, altera non per centrum sphæræ, propter mutuam ipsarum intersectionem, erunt in uno aliquo plano (2. xi.) Planum autem illud superficiem sphæricam secando, circulum maximum faciet: ad cujus peripheriam terminantur rectæ illæ, sphæricâ superficie terminatæ; cum tota peripheria sit in superficie, rectæ autem in circuli plano. Itaque in circulo erit recta quædam per centrum, alteram in eodem circulo non per centrum secans. Quam si

ſi ad perpendiculum ſecet, mediam dividet; ſi mediam dividat, ad perpendiculum ſecabit (3. iii.) *Q. E. D.*

PROP. XXIII. THEOR.

Si ſint in ſphærâ paralleli circuli, per quorum polos ducantur circuli maximi; parallelorum quidem arcus, maximis intercepti, ſimiles erunt: maximorum viciſſim parallelis, æquales.

Sint circuli in ſphærâ paralleli, A B C, D E F, quorum poli oppoſiti G, H. Per G, H duci intelligantur circuli maximi G A H, G B H; quorum peripheriæ parallelorum peripheriis in A, D, B, E occurrant. Dico parallelorum arcus, A B, D E, maximis interceptos, ſimiles eſſe. Maximorum viciſſim A D, B E arcus, parallelis interceptos, æquales.

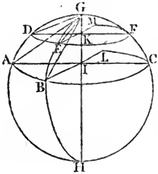


Circulorum G A H, A B C communis interſectio ſit recta A C. Ejuſdem autem G A H et circuli D E F communis interſectio ſit recta D F. Propter parallela plana circulorum A B C, D E F, rectæ A C, D F erunt parallelæ (16. xi.) Simili ratione ſi rectæ B L, E M communes ſint circuli G B H cum parallelis illis, A B C, D E F interſectiones, parallelæ oſtendentur rectæ B L, E M.

Jam vero circulus maximus G A H, cum per polos parallelorum A B C, D E F ductus ſit, utrumque medium dividit (15. hujus.) Simili ratione circulus maximus G B H parallelorum A B C, D E F utrumque medium dividit. Rectæ igitur A C, B L diametri ſunt circuli A B C; rectæque D F, E M diametri circuli D E F. Rectæ igitur A C, B L apud centrum circuli A B C; rectæ D F, E M apud centrum circuli D E F, ſibi mutuo occurrent. Occurrant igitur rectæ A C, B L in I; rectæ D F, E M in K. Erit I centrum circuli A B C, et K centrum circuli D E F. Sed propter rectas I A, I B rectis K D, K E, utramque utrique, parallelas, anguli A I B, D K E æquales erunt (10. xi.) Circulorum igitur A B C, D E F ſimiles ſunt

ſunt arcus A B, D E, qui angulos ad centra æquales ſubtendunt (2. Cor. 33. vi.) Quod primum erat demonſtrandum.

Dico præterea maximorum arcus, A D, B E, æquales.



Jungantur enim G A, G B, G D, G E.

Rectæ G A, G B a puncto G, polo circuli A B, in peripheriam deductæ, æquales erunt (Def. v.) In circulis igitur æqualibus, G A H, G B H, arcus G A, G B æquales (28. iii.) Et ſimiliter arcus G D, G E oſtendentur æquales. Æqualibus igitur, G A, G B, ablatis æqualibus, G D, G E; reliqui, A D, B E, æquales erunt. *Q. E. D.*

Cor. Arcus circulorum maximorum, a polo in peripheriam circuli cujuſlibet in ſphærâ deducti, inter ſe æquales erunt.

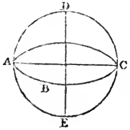
DEFINITIO.

Sinus arcûs cujuſlibet circularis eſt linea recta a termino arcûs alterutro in diametrum per terminum alterum ad perpendiculum deducta.

PROP. XXIV. THEOR.

Semidiameter circuli cujuſlibet in ſphærâ ſinus eſt arcûs circuli maximi a polo in peripheriam deducti.

Sit circulus in ſphærâ A B C, cujus poli ſint D, E.

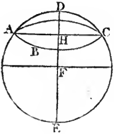


Per polos D, E ducatur circulus maximus A D C E, cujus peripheria peripheriæ A B C in punctis A, C occurrat. Dico ſemidiametrum circuli A B C ſinum eſſe arcus D A, vel illi æqualis D C.

Si maximus ſit circulus A B C res patet. Semidiameter enim circuli maximi A B C eadem eſt, quæ ſphæræ; æqualis igitur

tur alterius maximi A D C femidiametro. Et arcus D A quadrans eft (Cor. 16. hujus.) Sinus autem quadrantis eft femidiameter.

Sed circulus A B C non fit maximus. Circulorum, A D C maximi, et A B C non maximi, communis interfectio fit recta A C. Circulus maximus A D E, cum per polos circuli A B C ductus fit, illum A B C medium dividit (15. hujus.) Recta igitur A C circuli A B C diameter eft; et fi media dividatur recta A C in puncto H, punctum H centrum erit circuli A B C, et recta H A circuli illius femidiameter. Oftendendum igitur, rectam H A finum effe arcûs D A.

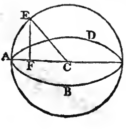


Capiatur fphæræ centrum F. Ad rectam funt puncta quatuor D, H, F, E (10. hujus.) Juncta igitur D E, per puncta H, F tranfibit, rectamque A C in puncto H mediam dividet. Cum autem in fphærâ recta D E per centrum rectam A C non per centrum mediam dividat, ad perpendiculum eam fecabit (22. hujus.) Angulus igitur D H A rectus. Recta igitur A H a puncto A, altero arcûs D A termino, in femidiametrum F D, per terminum alterum arcûs ejufdem, D, ad perpendiculum deducta, finus eft arcûs D A. *Q. E. D.*

PROP. XXV. THEOR.

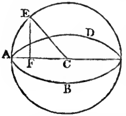
Recta, a puncto quocunque in fuperficie fphæræ in planum circuli cujufcunque maximi, per punctum non trajecti, ad perpendiculam deducta plano illi intra fphæram occurret.

Intelligatur fphæra circa centrum C, et circulus fphæræ maximus A B D. In fuperficie fphæræ fumatur punctum quodcunque E, modo non fit ad peripheriam circuli A B D. A puncto E, in planum circuli A B C ad perpendiculum deducatur recta E F; quæ plano circuli A B D in puncto F occurrat. Dico punctum F effe intra fphæram.



Jungantur

Jungantur enim C E, C F; quarum illa C F peripheriæ A B D in A occurrat. Recta E F ad perpendiculum eſt rectis omnibus plani A B D, quibus occurrit (Def. 3. xi.) Ad perpendiculum igitur rectæ C A, cui in F occurrit. Angulus igitur C F E rectus. Quare in triangulo C E F, latus C E latere C F majus (18. i.) Sed propter

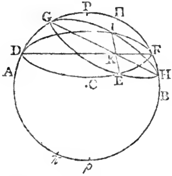


ſphæram rectæ, C E, C A, a centro ad ſuperficiem egreſſæ, inter ſe æquales. Recta igitur C A rectâ C F major. Punctum igitur F, punctis C, A interjectum eſt, quorum illud C centrum eſt ſphæræ, alterum autem A ad ſphæræ ſuperficiem. Punctum igitur F neceſſario intra ſphæram eſt. *Q. E. D.*

PROP. XXVI. THEOR.

Si circuli ſphæræ duo in duobus ſuperficiei ſphæricæ punctis ſe mutuo ſecent; maximus, per polos duorum ductus, medios dividit arcus punctis interſectionis mutuæ interceptos.

Intelligatur ſphæra circa centrum C. Hujus circuli duo D E F I, G E H I in punctis duobus E, I, ſuperficiei ſphæricæ ſe mutuo ſecent. Circuli D E F I poli ſunto P, p; alterius G E H I ſunto Π, π poli. Junctæ P, p, Π π, per centrum ſphæræ C utraque tranſibit (Cor. 9. hujus.) Duæ igitur P p, Π π in eodem erunt plano per centrum ſphæræ tranſeunte (2. xi.) Qua-



propter puncta quatuor P, Π, p, π, ad peripheriam erunt maximi cujuſdam. Dico maximum illum arcus I G E, I D E, qui punctis I, E, mutuæ circulorum interſectionis intercepti ſunt, medios dividere.

Circulus

Circulus ille maximus A P B per P, Π, *p*, π polos circulorum D E F, G E H trajectus, circulorum illorum plana secundum rectas D F, G H secet; quæ peripheriis in punctis D, F, G, H occurrant. In iisdem igitur punctis, D, F, G, H, maximi A P B peripheria duorum D E F, G E H peripherias secabit. Ostendendum igitur, arcus I D E, I G E, punctis D, G, divisos esse medios.

Jungatur E I. Recta E I circulorum D E F I, G E H I communis erit intersectio. Circulorum autem illorum plana ad perpendiculum sunt plano maximi A P B (15. hujus.) Recta igitur E I ad perpendiculum erit plano A P B (19. xi.) Quoniam autem a puncto E in sphærica superficie in planum circuli maximi A P B ad perpendiculum deducta est recta E I; recta E I plano A P B intra sphæram occurrit (25. hujus.) Occursus esto K. Punctum igitur K intra sphæram. Punctum autem K, cum sit in plano A P B, necnon ad rectam E I, quæ est in plano D E F, planis duobus A P B, D E F commune erit. Ad communem igitur duorum A P B, D E F intersectionem; sive ad rectam D F. Simili modo ostendetur punctum K ad rectam G H, communem utique planorum A P B, G E H intersectionem. Tres igitur rectæ E I, D F, G H in uno eodemque puncto K occurrunt, intra sphæram. Et cum intra sphæram sit punctum illud K, necesse est intra ambitum sit utriusque circulorum D E F, G E H, quorum planis est commune. Recta autem E I, cum ad perpendiculum sit plano A P B, id enim jam supra ostensum, rectis etiam D F, G H ad perpendiculum erit (Def. 3. xi.) cum utraque earum in plano sit A P B. Rectæ autem D F, G H, communes utique circulorum D E F, G E H cum plano maximi per polos intersectiones, diametri erunt circulorum D E F, G E H (15. hujus.) In circulo autem D E F, diameter D F, cum rectam E I circulo inscriptam ad perpendiculum secat in puncto K, in eodem puncto mediam eam dividet (3. iii.) Chordam autem E I mediam dividendo, arcum etiam I D E, cui in D occurrit, medium dividet (30. iii.) Similiter in circulo G E H diameter G H, cum rectam E I circulo inscriptam ad perpendiculum secat, mediam eam dividet. Et chordam E I mediam dividendo, arcum etiam I G E, cui in G occurrit, medium dividet. Arcus igitur I D E,

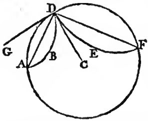
I G E, in punctis D, G, ubi occurrunt peripheriæ maximi per polos, medii dividuntur. *Q. E. D.*

Cor. Si circuli sphæræ duo in duobus sphæricæ superficiei punctis se mutuo secent; diametri, quæ medios dividunt arcus, mutuæ intersectionis punctis interceptos, in plano fiunt circuli maximi per polos secantium ducti, et ad communem planorum secantium intersectionem sibi mutuo occurrunt.

PROP. XXVII. THEOR.

Circulorum duorum, in sphæricâ superficie se mutuo contingentium, diametri per contactum sunt in plano maximi per polos contingentium.

Intelligatur sphærâ circa centrum C. Hujus circuli duo A B D, F E D se mutuo in puncto D ad superficiem sphæricam contingant. Per contactum D ducatur circuli A B D diameter A D, circuli autem F E D diameter F D. Dico rectas A D, F D in plano esse circuli sphæræ maximi per polos circulorum A D B, F E D transeuntis.



Quoniam enim circuli A B D, F E D in superficie sphæricâ se mutuo in D contingant; planorum A B D, F E G communis intersectio circulum utrumque in puncto D continget (Def. 6. hujus.) Esto recta G D communis illa planorum intersectio, circulos A B D, F E D in puncto D contingens; et jungatur C D. Recta G D, quæ circulum A B D in puncto D contingit, diametro ejus A D per contactum ad rectos erit (18. iii.) Eadem autem G D, cum circulum D E F in puncto D contingat, diametro ejus, F D, per contactum ad rectos erit. Porro eadem recta G D, cum superficiem sphæricam in puncto D contingat, semidiametro sphæræ per contactum, C D, ad rectos erit (Id enim ex 3. Cor. 3. hujus manifestum est.) Recta igitur G D tribus rectis A D, F D, C D in puncto D convenientibus ad perpendiculum insistit. Tres igitur rectæ A D, F D, C D in uno quodam plano

plano erunt (5. xi.) Quod quidem planum superficiem sphæricam secando circulum faciet. Faciat A D F. Maximus erit A D F, quoniam planum, quod secando eum fecerit, per sphæræ centrum transierit. Recta autem G D, plano maximi A D F ad perpendiculum est (4. xi.) cum ad perpendiculum sit rectis D A, D F quæ in illo sunt plano. Recta autem G D, planis circulorum A B D, F E D est communis. Plana igitur illa plano maximi A D F ad perpendiculum erunt (18. xi.) Unde vicissim maximi A D F planum ad perpendiculum erit circulorum illorum planis. Per polos igitur circulorum A B D, F E D transibit maximus A D F (13. hujus.) Circulis igitur duobus A B D, F E D in sphæricâ superficie in puncto D se mutuo contingentibus, diametri per contactum A D, F D in plano sunt circuli A D F, qui et maximus est, et per polos duorum A B D, F E D transit.

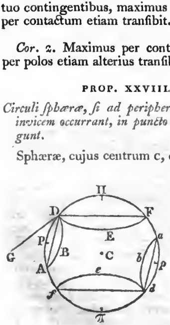
Cor. 1. Circulis duobus in sphæricâ superficie se mutuo contingentibus, maximus per contingentium polos per contactum etiam transibit.

Cor. 2. Maximus per contactum et utriusvis polos per polos etiam alterius transibit.

PROP. XXVIII. THEOR.

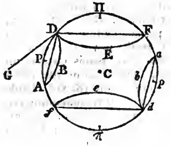
Circuli sphæræ, si ad peripheriam maximi per polos sibi invicem occurrant, in puncto concursûs se mutuo contingunt.

Sphæræ, cujus centrum C, circuli duo A B D, F E D, in puncto quodam D sibi invicem occurrant. Circuli A B D capiantur poli P, p (21. hujus.) Circuli etiam D E F, poli Π, π. Per polos P, Π, p, π trajiciatur circulus sphæræ maximus P Π p π, et ad hujus peripheriam sit concursus circulorum mutuus D. Dico circulos A B D, F E D se mutuo in D contingere.



Planorum

Planorum A B D, F E D communis interfectio fit recta G D, quæ per punctum D necessario transibit. Planum autem P Π p π, plana circulorum A B D, F E D, in rectis A D, F D secet. Plana circulorum A B D, F E D, ad perpendiculum sunt plano maximi P Π p π (15. hujus.) Communis igitur illorum interfectio G D ad perpendiculum eidem plano (19. xi.)



Rectis igitur omnibus in illo plano, quibus occurrit, eadem G D ad perpendiculum erit (Def. 3. xi.) Ad perpendiculum igitur rectis A D, F D; quibus, in plano illo P Π p π exiſtentibus, illa G D in D occurrit. Maximus autem P Π p π circulos A B D, F E D medios dividit (15. hujus.) Rectæ igitur A D, F D, circulorum A B D, F E D diametri ſunt. Recta igitur G D, quæ in plano circuli D E F, a puncto D, diametri ejus circuli, D F, termino, ad perpendiculum cum diametro eſt educta, circulum D E F in puncto D continget (Cor. 16. iii.) Pari ratione, eadem recta G D, quæ in plano circuli A B D, a puncto D, diametri ejus circuli, D A, termino ad perpendiculum cum diametro eſt educta, circulum D B A in D continget. Circulos igitur in ſphæra A B D, F E D, communis planorum interſectio G D utrumque in D contingit. Circuli igitur in D ſe mutuo contingunt (Def. 6. hujus.) *Q. E. D.*

Cor. I. Circulis A B D, F E D circa polos P, Π ſe mutuo contingentibus, circuli priorum æquales circa polos oppoſitos *p*, *π* ſe mutuo contingent. Polo enim *p* ſcribatur *a b d* illi A B D æqualis. Propter circulos A B D, *a b d* æquales, æquales erunt arcus P D, *p d*. Æquales autem P Π, *p π*. Æquales igitur Π D, *π d*. Circulus igitur circulo D E F æqualis, polo *π* ſcriptus, per punctum *d* tranſibit. Scribatur *f e d*. Circuli igitur *a b d*, *f e d*, in ſuperficie ſpherica ſibi mutuo in puncto *d* occurrunt, ad peripheriam utique maximi per polos. Se mutuo igitur in *d* contingunt. *Q. E. D.*

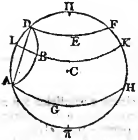
Cor.

Cor. 2. Puncta contactus D, *d*, sunt ex diametro opposita. Arcubus enim P D, *p d* æqualibus, addito communi P *d*, fiunt D P *d*, P *d p* æquales. Semicirculus autem ille P *d p*. Quare et D P *d* semicirculus. *Q. E. D.*

PROP. XXIX. THEOR.

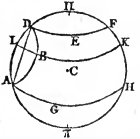
Sphæræ circulus, qui sphæræ circulum contingit, et alium quendam contingit priori parallelum. Tertium autem parallelum non contingit.

In sphærâ, cujus centrum C, circulus A B D circulum F E D in D contingat. Dico eundem A B D alium quendam contingere, illi F E D parallelum. Per contactum enim D ducatur circuli D B A diameter D A, quæ circuli peripheriæ iterum in A occurrat. Capiantur circuli D E F poli Π, π (21. hujus.) Polo Π, intervallo Π A, scribatur in superficie sphæricâ A G H. Circulus A G H, circulo D E F parallelus erit (4. Cor. 10. hujus.) nimirum cum circa eosdem sit polos. Circulo autem A B D in puncto A occurrit. Punctum autem A, terminus est diametri A D, circuli A B D, per D contactum circulorum A B D, F E D trajectæ (per construct.) Punctum igitur A ad pheriam est circuli maximi per polos circulorum A B D, F E D (27. hujus.) sive maximi per polos circulorum A B D, A G H; circulorum enim F E D, A G H iidem sunt poli (per construct.) Sphæræ igitur circuli D B A, H G A in puncto sphæricæ superficiei A sibi invicem occurrunt, existente concursu A ad peripheriam maximi per utriusque polos. Circuli igitur D B A, H G A se mutuo contingunt (28. hujus.) Sphæræ igitur circulus A B D, qui sphæræ circulum F E D contingit, et alium H G A contingit illi F E D parallelum.



Dico tertium duobus illis parallelum non contingere. Contingat enim circulus A B D, si fieri potest, tertium K B L prioribus F E D, H G A parallelum. Contactus esto B. Punctum igitur B erit ad peripheriam maximi per polos utriusque A B D, K B L (1. Cor. 27. hujus.) sive per polos utriusque A B D, F E D. Sed ad ejusdem

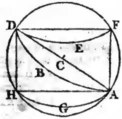
maximi peripheriam sunt puncta D, A. Maximus igitur ille circulo A B D in tribus punctis occurrit. Quod fieri nequit (2. Cor. i. hujus.) Circulus igitur A B D, circulos parallelos F E D, H G A, contingens, tertium L B K iisdem parallelum non contingit. *Q. E. D.*



PROP. XXX. THEOR.

Quos in sphærâ parallelos maximus quis contingit, ii etiam æquales erunt. Quique parallelos contingit et æquales, is maximus erit.

In sphærâ cujus centrum C, circulos parallelos F E D, H G A maximus D B A contingat, in punctis D, A. Dico circulos F E D, H G A æquales. Per contactus, D, A, ducantur circulorum F E D, H G A, diametri, D F, A H; quæ peripheriis iterum in F, H occurrant, et jungatur D A. Puncta quatuor D, F, A, H erunt ad peripheriam maximi, per polos parallelorum F E D, H G A eosque contingentis D B A (27. hujus.) Rectaque D A diameter erit circuli D B A, communis scilicet ejusdem et maximi D H A F interfectio (15. hujus.) Sed cum maximus sit uterque D B A, D H A F (maximo utique existente D B A ex hyp.) eadem D A circuli D H A F diameter. Junctis igitur D H, A F, anguli ad H et F recti. Rectæ autem D F, A H communes sunt planorum D E F, H G A cum plano maximi D H A F interfectiones. Plana autem D E F, H G A parallela sunt (ex hyp.) rectæ igitur D F, A H parallelæ (16. xi.) Anguli igitur F D A, D A H æquales (29. i.) Quare in triangulis D F A, A H D, ad F et H rectangulis, anguli reliqui D A F, A D H inter se sunt æquales. In circulo igitur D H A F, arcus D F, H A inter



inter se æquales (26. iii.) Rectæ igitur D F, A H, arcuum æqualium chordæ, inter se æquales (29. iii.) Circuli igitur D E F, A G H æquales; cum diametros D F, A H æquales habeant. In sphærâ igitur circuli paralleli D E F, A G H, quos maximus D B A contingit, inter se sunt æquales.

Jam vero parallelos et æquales D E F, A G H contingat D B A. Dico D B A maximum esse.

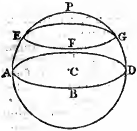
Jungatur enim D A; et figurâ ut prius constructâ, in circulo maximo D H A F, æquales erunt rectæ inscriptæ D F, A H, æqualium nempe circulorum D E F, A G H diametri. Arcus igitur D F, A H æquales (28. iii.) et anguli A D H, D A F æquales, qui arcubus illis æqualibus insistunt (27. iii.) Rectæ autem D F, A H parallelæ (16. xi.) communes utique planorum D E F, A G H parallelorum cum plano D H A F intersectiones. Anguli igitur F D A, D A H æquales (29. i.) In triangulis igitur F D A, H A D, anguli duo F A D, F D A simul sumpti duobus A D H, H A D simul sumptis æquales. Reliquus igitur D F A reliquo D H A æqualis. Arcus igitur D H A arcui D F A æqualis (26. iii.) Recta igitur D A circulum D H A F medium dividit. Circuli igitur D H A F diameter est recta D A. Circulus autem D H A F maximus est. Recta igitur D A, circuli maximi diameter, sphæræ diameter erit. Per C igitur centrum sphæræ transit. Eadem autem D A in plano est circuli D B A, nimirum cum planorum D B A, D H A F intersectio sit communis. Planum igitur circuli D B A, per centrum sphæræ transit. Maximus igitur circulus D B A.

Q. E. D.

Cor. Maximus in sphærâ circulus, qui duorum æqualium et parallelorum alterum contigerit, reliquum quoque continget.

PROP. XXXI.

Si maximus maximo ſit rectus, medios dividet parallelos omnes ejus, cui rectus eſt. Sed ſi maximus maximo inclinetur, duos continget inter ſe æquales, et ei, cui inclinatur, parallelos; eâ quidem utriuſque a maximo, cui paralleli ſunt, diſtantiâ, ut arcus maximi per parallelorum polos, parallelo et maximo interceptus, menſura ſit anguli inclinationis.



In ſphærâ cujus centrum C, circulo maximo A B D rectus ſit maximus A P D. Dico circulum A P D medios dividere omnes circuli A B D parallelos.

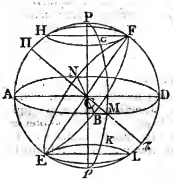
Sit E F G ſphæræ circulus maximo A B D parallelus. Circulus A P D per polos tranſit maximi A B D, cui rectus eſt (13. hujus.) Poli autem circuli A B D, paralleli etiam E F G ſunt poli (5. Cor. 10. hujus.) Maximus igitur A P D per polos circuli E F G tranſit; et, per polos tranſeundo, medium eum dividit (15. hujus.) Similiter de alio omni, maximo A B D parallelo, oſtendetur, eum a maximo A P D medium dividi. Maximus igitur A P D medios dividit parallelos omnes maximi A B D, cui rectus eſt. Quod primum erat demonſtrandum.

Sed maximo A B D, maximus E B F inclinetur. Dico maximum E B F duos quoſdam contingere maximo A B D parallelos, et inter ſe æquales; eâ autem utrumque a maximo A B D diſtantiâ, ut arcus maximi per illius A B D polos, utrovis parallelorum et maximo A B D interceptus, menſura ſit anguli, quo plana maximorum A B D, E B F ſibi invicem inclinantur.

Circulorum A B D, E B F, capiantur poli P, p, Π, π (21. hujus.) per quos trajiciatur circulus maximus A Π P π p. Maximus ille per polos, maximos A B D, E B F, diametris A D, E F, ſecet. Jungantur P F, p E. Polo P, intervallo P F, polo item p intervallo p E, ſcribantur in ſuperficie ſphæricâ circuli F G H, E K L. Circuli illi maximo

maximo A B D paralleli erunt (4. Cor. x. hujus.) Maximo autem E B F in punctis F, E, ad peripheriam maximi per polos occurrunt. Maximum igitur E B F in punctis F, E, contingent (28. hujus.) Circuli autem F G H, E K L, quos parallelos existentes maximus E B F contingit, inter se æquales erunt (30. hujus.) Maximus igitur E B F, maximo A B D inclinatus, duos contingit F G H, E K L inter se æquales, et maximo A B D parallelos.

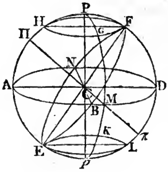
Ducatur P G M K unus quivis maximorum per polos P, p, transeuntium, qui peripheriæ maximi A B D in puncto M, parallelorum F G H, E K L peripheriis in punctis G, K occurrat. Dico arcuum G M, K M utrumque mensuram esse anguli, quo maximi A B D, E B F, sibi invicem inclinantur. Plana enim maximorum A B D, E B F diametro B C N se mutuo secent. Plano maximi A P D p ad perpendicula



sunt plana utriusque circuli A B D, E B F; nimirum cum A B P per polos utriusque transeat (15. hujus.) Recta igitur B N, duorum A B D, E B F communis interfectio, ad perpendiculum est plano A P D p (19. xi.) Omnibus igitur quibus occurrit in illo plano rectis (Def. 3. xi.) Rectæ autem D C, F C sunt in plano A P D p, communes nimirum planorum A B D, E B F, cum illo plano interfectiones. Rectis igitur D C, F C ad perpendiculum est recta B C N. Rectæ igitur B C N, communi planorum A B D, E B F, interfectioni, ad perpendiculum est, in plano quidem A B D, recta D C; in plano autem E B F recta F C. Angulus igitur F C D mutua est planorum A B D, E B F inclinatio (Def. 5. xi.) Anguli autem F C D, ad centrum circuli A P D p, arcus F D est mensura. Circulis autem maximis A P D p, P G M p per polos parallelorum H G F, A B D, ductis, arcus F D, G M, parallelis intercepti, inter se æquales erunt (23. hujus.) Arcus igitur G M æqualis est mensuræ anguli F C D, quo plana maximorum A B D, E B F sibi invicem inclinantur.

Et

Et fimili modo oftendetur arcum K M arcui E A æqualem, ac proinde menfuram effe anguli A C E, illi F C D ad verticem oppofito et æquali. Conftat igitur propofitum.



Cor. 1. Angulus inclinationis mutuæ duorum quorum libet maximorum in fphærâ circulorum arcu maximi, per polos utriufque, metitur peripheriis intercepto.

Cor. 2. Duorum quorum libet maximorum in fphærâ circulorum polorum diftantia menfuræ anguli inclinationis mutuæ æqualis eft. Junctis enim P p, Π π (quarum utraque per C tranfibit (per 10. hujus) propter angulos P C D, Π C F rectos (10. hujus) arcus P D, Π F funt æquales. Ablatoque communi F P, relinquetur P Π reliquo F D æqualis.

Cor. 3. Circuli quotquot maximi ad datum aliquem maximum (A B D) fimiliter inclinati funt, polos habent ad minoris alicujus peripheriam dato maximo paralleli. Et quotquot maximi polos habent ad minoris ejufdem peripheriam, dato alicui maximo (A B D) paralleli, ad datum illum maximum fimiliter inclinati funt.

Manente enim maximorum A B D et E B F inclinatione, manet polorum P, Π diftantia, arcus P Π (per Cor. 2.) Manente autem diftantiâ polorum P Π, polus Π erit ad peripheriam in fuperficie fphæricâ, polo P, intervallo P Π, fcriptam.

Contra, exiftente femper polo Π ad peripheriam polo P, intervallo P Π, fcriptam; manet polorum P, Π diftantia, arcus P Π. Et manente diftantiâ illa, manet maximorum, dati A B D et alterius E B F inclinatio.

Cor. 4. Circuli quotquot maximi minorem aliquem datum contingunt, ad maximum, cui datus ille minor parallelus eft, fimiliter inclinati funt. Et quotquot maximi,

maximi ad maximum aliquem datum ſimiliter inclinati ſunt, minorem quendam maximo parallelum, eundem omnes, ſed in punctis alii aliis contingent.

Cor. 5. Circuli maximi, qui æquales contingunt, ad maximos, quibus æquales paralleli ſunt, ſimiliter inclinati ſunt. Et circuli maximi, qui ad alios maximos ſimiliter ſunt inclinati, contingunt æquales circulos maximis illis aliis parallelos.

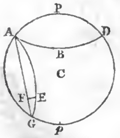
Cor. 6. Circuli maximi qui inæquales aliquos contingunt, ad maximos, inæqualibus illis parallelos, inæqualiter inclinati ſunt; et qui majorem contingit inclinatior eſt. E converſo, inæqualium major eſt, quem inclinatior contingit.

Cor. 7. Si maximus maximo inclinetur, quo poli propius diſtent, circulus circulo inclinatior erit. Imminuto enim arcu P Π, qui polorum P, Π eſt diſtantia, angulus inclinationis, F C D, pariter imminuetur.

PROP. XXXII. PROBL.

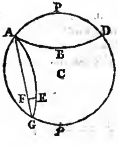
Circulo in ſphæricâ ſuperficie dato, punctoque in ſuperficie dato extra circuli planum, per datum punctum circulum ſphæræ deſcribere, qui datum circulum in dato peripheriæ puncto contingat.

In ſuperficie ſphæræ cujus centrum C, detur circulus A B D. Detur etiam punctum E extra planum circuli, punctumque A in peripheriâ. Scribendus eſt circulus in ſphæricâ ſuperficie, per datum punctum E, qui circulum datum A B D, in dato puncto A, contingat. Dati circuli A B D capiantur poli P, p. Per polos P, p datumque punctum A ducatur circulus ſphæræ maximus P A p. A puncto E, in planum circuli P A p, deducatur ad perpendiculum recta E F; quæ plano in F occurrat. Juncta A F peripheriæ P A p iterum in G occurrat. Per puncta



tria

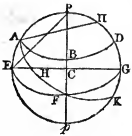
tria A, F, G ſcribatur circulus (5. iv.) Dico factum eſſe quod faciendum erat. Nam cum recta E F ad perpendiculum ſit plano P A p; planum circuli A E G eidem plano P A p, ad perpendiculum erit (18. XI.) Circulus igitur maximus p A P per polos trajectus eſt circuli A E G (13. hujus.) Sed per polos circuli A B D (per conſtruct.) Per utriuſque igitur A E G, et A B D polos. Sed per punctum quoque A (per conſtruct.) Circuli igitur A E G, A B D in ſuperficie ſphæricâ in puncto A ſibi invicem occurrunt, quod quidem punctum A ad peripheriam eſt maximi per utriuſque polos. Circuli igitur A B D, A E G in puncto illo A ſe mutuo contingunt (28. hujus.) Per datum igitur in ſphæricâ ſuperficie punctum E, ſcriptus eſt ſphæræ circulus A E G, qui datum A B C in dato puncto E contingit. *Q. E. F.*



PROP. XXXIII. PROBL.

Circulum in ſphæricâ ſuperficie maximum deſcribere, qui datum contingat in dato peripheriæ puncto.

Sit ſphæra cujus centrum C; et in ſuperficie hujus ſphæræ detur circulus A B D, et in ejus peripheriâ detur punctum A. Scribendus eſt maximus in ſphærâ circulus, qui datum A B D in dato puncto A contingat. Sed oportet datum A B D non eſſe maximum (Cor. 11. hujus.)



Dati A B D capiantur poli P, p (21. hujus.) Polis P, p in ſuperficie ſphæricâ ſcribatur maximus E F G, qui dato A B D parallelus erit (4. Cor. 10. hujus.) Per polos P, p, punctumque A ſcribatur circulus maximus P A p, qui maximo E F G in punctis E, G occurrat. Circulo p A P, a puncto A, inſcribatur recta A Π, junctæ E P æqualis (1. iv.) Polo Π per

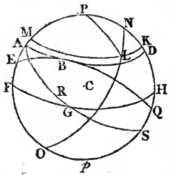
per punctum A scribatur circulus A H K. Dico factum esse quod faciendum erat. Nempe maximum esse circulum A H K, et datum A B D, in dato puncto A, contingere.

Cum enim punctum P polus sit maximi E F G (per construct.) maximi P A p arcus P E quadrans erit (Cor. 16. hujus.) Recta igitur E P, cui æqualis inscripta est A Π, latus est quadrati maximo p A P inscripti. Circulus igitur A H K maximus (3. Cor. 17. hujus.) Sed cum puncta P, Π in peripheriâ maximi P A p, poli sint circulorum A B D, A H K (per construct.) maximus ille P A p per polos utriusque, A B D, A H K, trajicitur. Circuli igitur A H K, A B D, qui sibi invicem in puncto A occurrunt, quod quidem punctum A ad peripheriam est maximi per polos utriusque, contingunt se mutuo in puncto A (28. hujus.) Descriptus est igitur in sphæræ superficie circulus A H K maximus, qui datum A B D in dato puncto A contingit. *Q. E. F.*

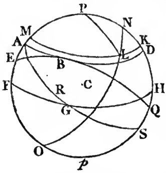
PROP. XXXIV. PROBL.

Circulo in sphæricâ superficie dato, punctoque dato extra planum circuli, per datum punctum maximum ducere, qui datum circulum contingat.

In superficie sphæræ, cujus centrum C, detur circulus A B D. Detur etiam punctum E in superficie sphæræ, extra circuli planum. Scribendus est per E maximus, qui datum A B D contingat. Sed oportet datum A B D non esse maximum (Cor. 2. hujus.) Dati A B D capiantur poli P, p (21. hujus.) Polis P, p, scribatur maximus F G H, qui dato A B D parallelus erit. Per polos P, p, punctumque datum E, scribatur maximus P E p; qui parallelis A B D, F G H in punctis A, F occurrat. In peripheriâ semicirculi F P H, ad punctum P capiatur arcus P K arcui A F æqualis. Et



Et polo P, per punctum K, ſcribatur in ſuperficie ſphæricâ circulus K L M. Polo autem E ſcribatur maximus N L O, qui circulo K L M in puncto L occurrat. Denique polo L, per datum punctum E, ſcribatur in ſuperficie ſphæricâ circulus E B Q. Dico factum eſſe quod faciendum erat. Nempe maximum eſſe circulum E B Q, et datum A B D contingere.



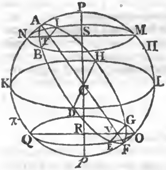
Quoniam enim punctum E polus eſt circuli maximi N L O, ſi per puncta E, L duceretur maximus, ejus arcus E L quadrans eſſet (Cor. 16. hujus.) Quadrans igitur eſſet arcus L E, a circuli E B Q polo L in peripheriam ejus deductus. Maximus igitur eſt circulus E B Q (3. Cor. 17. hujus.) Dico præterea circulum E B Q datum A B D contingere. Per datum punctum A ducatur (per præcedentem) maximus A R S, qui datum A B D, in puncto peripheriæ dato A, contingat. Et per puncta P, L in ſuperficie ſphæricâ ducatur maximi arcus. Cum puncta P, L maximorum F G H, E B Q ſint poli; arcus P L æqualis erit menſuræ anguli inclinationis mutuæ circulorum F G H, E B Q (2. Cor. 31. hujus.) Sed cum P polus ſit circuli K L M (per conſtruct.) arcus P K, P L ſunt inter ſe æquales. Arcus autem P K arcui A F æqualis (per conſtruct.) Arcus igitur A F, P L inter ſe æquales. Arcus igitur A F æqualis erit menſuræ anguli inclinationis mutuæ circulorum F G H, E B Q. Sed cum circulus ſphæræ maximus, A R S, illum A B D, maximo F G H parallelum, in A contingat (per conſtruct.) maximi P A p per parallelorum F G H, A B D polos, arcus A F, parallelis interceptus, menſura eſt anguli inclinationis mutuæ maximorum A R S, F G H (31. hujus.) Maximo igitur F G H, maximi A R S, E B Q ſimiliter ſunt inclinati. Horum autem alter, A R S, contingit circulum A B D maximo F G H parallelum (per conſtruct.) Alter igitur E B Q eundem A B D continget (4. Cor. 31. hujus.) Per datum

tum igitur punctum E, in superficie sphæricâ, scriptus est circulus maximus E B Q, qui datum A B D non maximum contingit. Q. E. F.

PROP. XXXV.

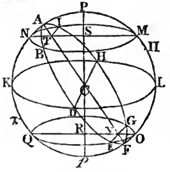
Si quos parallelos in sphæricâ superficie circulos maximus quis sphæræ secet, non per polos; in segmenta inæqualia eos dividet, excepto parallelorum maximo. Inæqualium autem cujusvis paralleli segmentorum illud semicirculo majus erit, quod ad partes est easdem circuli secantis cum polo suo propiore. Minus autem semicirculo illud, quod ad partes circuli secantis est contrarias. Denique parallelorum, in oppositis bemisphæriis æqualium, segmenta alterna sunt inter se æqualia.

Sphæræ circa centrum C, circulus A D F H maximus parallelos in superficie sphæricâ N B M I, K D L H, Q E O G (in quibus K D L H maximus) secet, non per polos. Dico primum, præter unum K D L H, omnes inæqualiter divisi. Nam si vel unum aliquem ex parallelis, qui maximus non sit, maximus A D F H æqualiter dividat, omnes quidem per polos secat (14. hujus.) Quod hypothesi contrarium est.



Parallelorum autem sint poli P, p. Et cum omnes, præter maximum K D L F, inæqualiter a polis distent (2. Cor. 17. hujus.) sit P polus circulo N B M I propior. Segmenta circuli N B M I, circulo maximo A D F H inæqualiter ut ostendimus divisi, ad contrarias partes erunt circuli secantis A D F H. Sed cum inæqualia sint, alterum semicirculo necessario majus erit, alterum minus. Dico majus semicirculo esse illud, quod ad easdem partes circuli secantis cum polo propiore P jacet; minus autem quod ad contrarias. Jungatur P p. Recta P p per centra sphæræ circulique N B M I transit (10. hujus.) Centrum igitur circuli N B M I est ad rectam C P. Segmentorum autem circuli N B M I semicirculo majus erit

erit illud, quod centrum circuli intra fui ambitum claudit; minus femicirculo erit illud, quod excludit centrum. Cum vero centrum circuli N B M I fit ad rectam C P; illud fegmentum ambitu fuo centrum circuli continebit, cui recta C P occurrit; fegmentum alterum, cui recta C P non occurrit, centrum circuli excludet. Recta autem C P, a centro fphæræ C (quod idem circuli maximi A D F H



centrum eft) ad P polum circuli N B M I ducta, in illud circuli N B M I fegmentum incidet, quod ad partes eafdem eft circuli fecantis A D F H cum polo P. Hoc enim circuli fegmentum obviam fit rectæ a centro C in P tendenti. Alteri igitur fegmento ad partes contrarias recta C P non occurret, ne bis eidem plano occurrat, contra 1^m. xi. Inæqualium igitur circuli N B M I fegmentorum illud femicirculo majus eft, quod ad eafdem partes eft circuli fecantis A B F H, cum P polo circuli N B M I propiore. Minus autem femicirculo fegmentum illud, quod ad partes contrarias.

Dico præterea parallelorum, in oppofitis hemifphæriis æqualium, fegmenta alterna inter fe æqualia effe. Alterna autem dicuntur fegmenta, quæ ad contrarias partes fint circuli fecantis.

Secet circulus A D F H parallelos in oppofitis hemifphæriis N B M I, Q E O G. Quorum alterum N B M I in punctis B, I fecet, alterum Q E O G, in punctis E, G. Idem autem A D F H, maximum parallelorum K D L H in punctis D, H fecet. Junctæ D H, B I, E G, communes erunt planorum trium K D L H, N B M I, Q E O G cum plano A B D H interfectiones. Circuli maximi A B D H capiantur poli Π, π. Circulus maximus P K p, per quatuor illa puncta P, Π, p, π trajectus, maximo parallelorum K D L H, in punctis fuperficiei fphæricæ K, L; parallelis N B M I, Q E O G, in punctis N, M, Q, O; circulo maximo denique A D F H, in punctis A, F occurrat. Juncta A F, communis interfectio erit circulorum maximorum

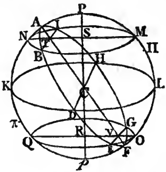
morum PAKF, ABFH, ac proinde per centrum ſphæræ C tranſibit (11. hujus.) Junctæ NM, QO communes erunt planorum NBMI, QEOG cum plano maximi PKp interſectiones. Maximus autem PKp circulos NBMI, QEOG, per quorum polos trajicitur, medios dividit, et ad perpendiculum ſecat (15. hujus.) Rectæ igitur NM, QO, circulorum NBMI, QEOG ſunt diametri. Mediæ igitur dividantur rectæ MN, QO in punctis S, R. Puncta S, R centra erunt circulorum NBMI, QEOG. Junctaque Pp, per centrum ſphæræ C, et per puncta S, R, tranſibit, planiſque circulorum NBMI, QEOG ad perpendiculum erit (10. hujus.)

Occurrat autem recta MN, ſeu SN, rectæ BI in T. Circulis ADFH, NBMI ſeſe mutuo in punctis B, I ſecantibus; circulus maximus PKp, per polos utriuſque trajectus, arcus BNI, BAI punctis mutuæ interſectionis B, I, interceptos, in punctis N, A, medios dividit (26. hujus.) Arcus igitur BNI BAI in punctis, N, A, medios dividit (26. hujus.) Arcus igitur BNI, BAI in punctis N, A, medii dividuntur. Recta igitur SN a centro circuli NBMI, quæ arcum BNI medium dividit, chordam BI, cui in puncto T occurrit, mediam dividit et ad perpendiculum ſecat. Recta igitur ST diſtantia eſt rectæ BI, circulo BNMI inſcriptæ, a centro. Rurſum cum recta CA, a centro circuli DAH, arcum BAI medium dividat, chordam BI mediam dividet. Chordæ igitur BI punctum medium T eſt ad rectam CA, ſeu FA. Quod ſi in circulo QEOG, recta QO vel RO rectæ EG in V occurrat; eodem modo oſtendemus rectam EG in puncto V mediam dividi, et ad perpendiculum; rectam RV diſtantiam eſſe rectæ EG, circulo QEOG inſcriptæ, a centro; et punctum V eſſe ad rectam CF vel AF.

Jam vero cum recta Pp ad perpendiculum ſit planis circulorum NBMI, QEOG; anguli CST, CRV recti erunt. Anguli autem TCS, VCR æquales (15. i.) Triangula igitur CTS, CVR ſimilia erunt, et CS erit ad ST ut CR ad RV. At vero ſi circuli paralleli NBMI, QEOG æquales ſint, rectæ CS, CR æquales erunt (6. hujus.) Quare ST, RV æquales. In æqualibus igitur circulis NBMI, QEOG rectæ BI, EG, æqualibus a centris S, R diſtantiis inſcriptæ, inter ſe æquales erunt. Rectæ autem æquales BI, EG, circulis æqualibus inſcriptæ, æqualia ſegmenta abſcindent, majus

 utique

utique majori, minus minori. Circuli autem N B M I majus eſt ſegmentum B M I, quod centrum circuli s intra ſui ambitum complectitur. Circuli item Q E O G, ſegmentum Q E G majus, quod centrum intus habet. Segmentum igitur B M I ſegmento E Q G æquale, et reliquum B N I reliquo E O G. Cæterum cum recta S R planum circuli A D F H in puncto C ſecat; S, R centra circulorum N B M I, Q E O G, erunt ad contrarias partes plani A D F H. Segmenta igitur B M I, E Q G, quibus centra illa inſunt, ad contrarias ejuſdem plani partes. Unde et ſegmenta reliqua B N I, E O G neceſſario ad contrarias. Segmenta igitur B M I, E Q G ſunt alterna. Alterna item B N I, E O G. Parallelorum igitur, in oppoſitis hemiſphæriis æqualium, alterna ſegmenta ſunt æqualia. *Q. E. D.*



Cor. Arcus circuli maximi, parallelis æqualibus et maximo parallelorum intercepti, æquales erunt. Majoribus autem intercepti ſunt minores.

Circulo maximo P K *p*, per polos maximorum K D L H, A D F D tranſeunte; maximorum K D L H, A D F D uterque ad perpendiculum eſt plano maximi P K *p* (15. hujus.) Puncta igitur D, H ſuperficiei ſphæricæ, ubi peripheriæ A D F D, K D L H mutuo occurrunt, circuli maximi P K *p* ſunt poli (13. hujus.) Arcus igitur D A, D F maximi ſunt quadrantes (Cor. 16. hujus) ac proinde inter ſe æquales. Circulis autem A D F H, N B M I, in ſuperficie ſphæricâ ſe mutuo ſecantibus, maximus K P *p* per polos utriuſque ſecantium trajectus, arcus B A I, B N I, punctis interſectionis mutuæ B, I interceptos, medios dividit in punctis A, N (26. hujus.) Arcus igitur B A dimidius eſt arcûs B A I. Et eodem modo oſtendetur arcus E F arcûs E F G dimidius. Jam vero ſi circuli paralleli N B M I, Q E O G æquales ſint, æquales erunt C S, C R, æquales utique parallelorum æqualium

lium a centro ſphæræ C diſtantiæ (6. hujus.) Sed propter ſimilia triangula C S T, C R V, æqualibus exiſtentibus C S, C R, erunt etiam S T, R V æquales. In circulis igitur æqualibus N B M I, Q E O G, inſcriptæ ſunt rectæ B I, E G, æqualibus a centris circulorum S et R diſtantiis. Rectæ igitur B I, E G inter ſe æquales (14. iii.) Cæterum rectæ æquales B I, E G circulo A B F D inſcriptæ, abſcindunt arcus æquales B A I, E F G (28. iii.) Æqualium autem B A I, E F G dimidii quoque æquales. Arcûs autem B A I, dimidius B A, arcûſque E F G dimidius E F (oſtenſum enim.) Arcus igitur B A, F E inter ſe æquales, et quadrantibus A D, F D ablati, relinquunt B D, E D æquales. *Q. E. D.*

Quod ſi parallelorum N B M I, Q E O G major ſit N B M I; arcuum B D, E D ille B D minor erit.

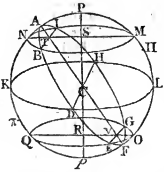
Parallelorum enim inæqualium N B M I, Q E O G, major N B M I propius a centro ſphæræ C aberit (6. hujus.) Diſtantiarum igitur C S, C R minor erit C S; et in triangulis C S T, C R V ſimilibus, recta S T, minor quam R V. Circulis igitur duobus N B M I, Q E O G inſcriptæ ſunt rectæ, B I, E G; quarum B I majori circulo inſcripta eſt minore a centro diſtantiâ. Recta igitur B I multo major quam E G (15. iii.) Circulo igitur A D F H inſcriptæ ſunt rectæ B I, E G; quarum B I major. Arcus igitur B A I arcu E F G major. Quare et dimidius B A I, dimidio E F G major. Arcus igitur B A arcu E F major. Æqualibus igitur D A, F D ablatis inæqualibus B A, E F, quorum B A major, relinquetur B D reliquo E D minor. *Q. E. D.*

Cor. 2. E converſo ſi arcus B D, E D æquales ſint, paralleli N B M I, Q E O G æquales erunt. Vel ſi arcuum B D, E D minor ſit B D, parallelorum major erit N B M I. Æqualibus enim D B A, D E F ablatis æqualibus D B, D E; arcus reliqui B A, E F inter ſe æquales. Sed æqualium dupli æquales. Arcus igitur B A I, E F G æquales. Rectæ igitur B I, E G, quæ in circulo A D F H arcus æquales auferunt, inter ſe æquales ſunt (29. iii.) ac proinde ad æquales a centro circuli diſtantias (14. iii.) Rectæ igitur C T, C V ſunt æquales. Triangula autem T C S, V C R ſimilia ſunt. Rectæ igitur C S, C R ſunt æquales.

 Circuli

Circuli igitur N B M I, Q E O G, qui æqualibus hisce rectis a sphæræ centro C distant, inter se æquales (6. hujus.) *Q. E. D.*

Arcuum autem B D, E D sit B D minor. Æqualibus igitur D B A, D E F ablatis inæqualibus D B, E D, relinquentur A B, E F inæquales; quorum major erit A B, qui relinquitur minore D B ablato. Duplus igitur A B, sive B A I, duplo E F, sive E F G major. Arcuum autem in circulo A D F H inæqualium, B A I, E F G, quorum uterque semicirculo minor est, chordæ B I, E G, inæquales erunt, et major erit B I majoris arcûs chorda. Rectarum autem B I, E G inæqualium, quæ circulo A D F H inscriptæ sunt, inæquales erunt a centro circuli distantiæ, C T, C V, et minor majoris distantia (15. iii.) Recta igitur C T minor quam C V. Et in triangulis C S T, C R V similibus recta C S minor quam C R. Parallelorum igitur N B M I, Q E O G, circulus N B M I major (6. hujus.) *Q. E. D.*



Cor. 3. Rectæ B G, I E, quæ alternas utique circuli maximi B A F et æqualium parallelorum intersectiones, B et G, I et E conjungunt, sphæræ sunt diametri. Arcus enim B A I, duobus A I, F G simul sumptis est æqualis. Duo igitur B A I, I G simul sumpti, tribus A I, I G, G F simul sumptis sunt æquales. Sive arcus B A I G, semicirculo A I F æqualis. Semicirculus igitur est arcus B A I G. Recta igitur B G quæ arcum B A I G subtendit, diameter est circuli A B F. Sphæræ igitur diameter. Nimirum cum circulus A F B sphæræ maximus sit. Simili modo ostendetur recta I E sphæræ diameter.

SCHOLION.

SCHOLION.

Si planum circuli maximi A D F H, qui parallelos secat, qualitate quâdam perfectæ opacitatis cogitetur indui, quo efficiatur, ut quæcunque in altero sint hemisphærio in altero conspici nequeant; contrariis paralleli cujusque segmentis contrarii poli conspicui erunt. Nimirum utrique segmento polus, qui ad easdem est circuli secantis partes. Majoribus igitur segmentis propior polus conspicuus erit, minoribus remotior. Parallelo autem cuique polus propior est is, qui ad easdem est partes maximi parallelorum; remotior is, qui ad contrarias. Si quos igitur parallelos in sphærâ circulos, maximus quis secet non per polos, in segmenta inæqualia eos dividet, maximo parallelorum excepto. Segmentorum autem cujusque paralleli majus erit illud, quod polo sibi conspicuo et maximo parallelorum interpositum est; minus, e contrario, quod maximo parallelorum et polo sibi occulto. Confer Theod. Lib. ii. Prop. 19^m. Quæ quidem hæc ipsa est propositio nostra 35, sed sermone Astronomico enuntiata, qui rebus mere Geometricis minus convenit.

PROP. XXXVI. THEOR.

Si quis maximus in sphærâ circulus parallelos aliquos in superficie secet non per polos, inæqualiter omnes dividet præter maximum; sed magis inæqualiter, qui, in eodem hemisphærio, polo sunt propiores.

Parallelos N B M I, K D L H, Q E O G (quorum K D L H maximus) maximus A D F H secet, non per polos. Inæqualiter eum omnes dividere præter K D L H, ostensum in præcedenti. Dico magis inæqualiter, qui, in eodem hemisphærio, polo sunt propiores.

Etenim in omni distantiâ circuli N B M I a polo suo P, erit S, centrum circuli N B M I, ad rectam P p. Erit etiam T, punctum medium rectæ, B I, ad utramque rectam S N et C A. Sursum igitur feratur planum circuli N B M I versus polum suum P. In triangulo S C T, manet angulus S C T. Manet etiam angulus ad S rectus. Manet igitur tertius trianguli angulus C T S. Manentibus autem trianguli C S T angulis omnibus, manet laterum C S, S T inter se proportio. Augebitur autem C S, circulo sursum versus polum lato. Simul igitur augebitur

S T. Augetur igitur S T, dum, propter imminutum circulum N B M I, diameter ejus imminuitur. Augetur igitur rectæ S T ad diametrum circuli N B M I proportio; five proportio distantiæ rectæ B I, circulo N B M I inscriptæ, ad circuli diametrum augetur. Segmentorum igitur, quorum inscripta B I basis est, augetur, ratione totius circuli, quod semicirculo majus est, alterum minuitur. Circulus igitur N B M I, quo sursum movendo polum suum P propius accesserit, a maximo A D F H magis inæqualiter dividitur. *Q. E. D.*

ARCHI-

ARCHIMEDIS

CIRCULI DIMENSIO;

CUM

COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ,

LATINE

EX INTERPRETATIONE TORELLII EMENDATA.

E 4

ARCHIMEDIS

CIRCULI DIMENSIO;

CUM

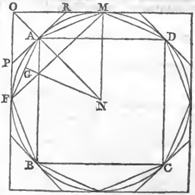
COMMENTARIIS EUTOCII ASCALONITÆ.

PROP. I. THEOR.

Quilibet circulus æqualis eſt triangulo rectangulo ejuſmodi, ut eorum laterum, quæ circa rectum angulum ſunt, alteri quidem æqualis ſit ea, quæ ex centro, alteri vero ambitus.

Sit circulus A B C D; triangulo E, quali ponitur, dico eum æqualem eſſe *.

Sit enim circulus, ſi fieri poteſt, major, et inſcribatur eidem quadratum A C; ſecenturque circumferentiæ in



duas partes æquales; idque ſemper fiat, donec ſegmenta minora tandem ſint quam exceſſus, quo circulus triangulum excedit[a]. Itaque rectilineum, ſegmentorum baſibus comprehenſum, majus adhuc erit triangulo. Sumatur circuli centrum N; et in latus rectilinei A F ad perpendiculum

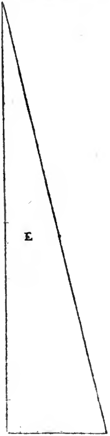
[a] Vid. demonſtrationem 2[ae]. duodecimi.

* *Sequimur lectionem codicum Pariſienſium* A, B, C, D.

diculum deducatur NG. Minor eſt igitur NG Catheto trianguli. Eſt autem et rectilinei ambitus altero latere minor; utpote qui minor etiam eſt ambitu circuli. Minus eſt igitur rectilineum triangulo E. Quod eſt abſurdum.

Sit autem circulus, ſi fieri poteſt, minor triangulo E. Et circumſcribatur eidem quadratum; ſecenturque circumferentiæ in duas partes æquales; et ducantur per puncta ſectionum rectæ contingentes. Itaque angulus O A R rectus eſt: ideoque O R major quam M R; cum M R ipſi R A eſt æqualis. Quare triangulum R O P majus eſt dimidio figuræ O P A M. Relinquantur ſegmenta, cujuſmodi eſt P F A, quæ minora ſint exceſſu, quo triangulum E excedit circulum A B C D. Circumſcriptum igitur rectilineum minus adhuc eſt triangulo E. Quod eſt abſurdum. Eſt enim majus; eo quod N A æqualis eſt catheto trianguli, et ambitus major ejuſdem trianguli baſe.

Æqualis eſt igitur circulus triangulo E.



EUTOCIUS.

LIBROS illos Archimedis evolventi, qui præ cæteris plani ſunt fere et perſpicui, et qui minimum negotii legentibus faceſſunt; ſiqua tamen vel in illis ipſis, inquam, evolventi eos occur-

occurrant, quæ aliquâ saltem interpretatione egeant; instituto meo parum me satisfacturum arbitror, nisi quæ ad illorum etiam explicationem utilia sint, iis adjungam, quæ ad opus de Sphærâ et Cylindro jam ante commentatus sum. Namque majora quæ sunt, et plus ingenii et acuminis requirunt, ea ut mente assequi valeamus, dignum est profecto quod votis precibusque a Diis ipsis exposcamus.

Itaque propositus nobis deinceps sit libellus, qui Circuli Dimensio inscribitur. In quo, quid auctori propositum sit, ex ipsâ inscriptione dignoscitur. Hoc enim demonstrare vult, cuinam spatio rectilineo circulus æqualis sit; rem a philosophis, qui ante ipsum floruerunt, jampridem quæsitam. Hoc utique est quæsitum illud, quod cum Hippocrates Chius, et Antipho diligenter investigâssent, eas nobis falsas ratiocinationes reliquerunt, quas probe nosse illos arbitror, qui Geometricam Eudemi Historiam et Aristotelis Favos evolverint.

Est autem hic libellus, ut ait Heraclides in Archimedis vitâ, ad necessarios vitæ usus apprime utilis. Demonstrat enim, circumferentiam circuli triplam diametrum exuperare, minus quidem quam parte septimâ diametri, magis vero quam decem ejusdem partibus septuagesimis primis. Hoc utique eum demonstrâsse ait, æstimatione quâdam, quæ veram quantitatem proxime accedat, institutâ: invenisse autem per quasdam helicas, rectam lineam datæ circuli circumferentiæ accurate æqualem.

In Primum Theorema.

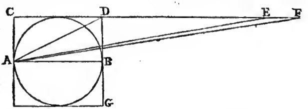
Primum Theorema etiam iis, qui mediocriter in mathematicis disciplinis exercitati sunt, nullam videtur dubitationem habere; cum ipsa Archimedis verba perspicua sint, et quod propositum est, nullâ re omissâ, concludant. Sed tamen vitio ei vertit nonnemo, quasi ad demonstrationem re quâdam perperam usus esset, quæ nondum sit demonstrata. Cum enim triangulum rectangulum exposuisset: habeat, inquit, eorum laterum, quæ circa rectum angulum sunt, alterum quidem æquale ei, quæ ex centro; alterum vero circumferentiæ. At vero quo pacto recta linea sumatur circuli circumferentiæ æqualis, neque ipse, neque alius quispiam demonstravit. Verum rem perpendenti perspicuum erit, nihil Archimedem scripsisse, quod non oportuit. Constat enim inter omnes, circuli circumferentiam magnitudinem esse; atque ex iis etiam, opinor, quarum una est dimensio. Est autem et recta linea ejusdem generis. Itaque licet nondum appareat, quâ quis ratione possit circuli circumferentiæ æqualem rectam exhibere; esse tamen naturâ rectam aliquam eidem æqualem nemo unquam dubitavit. Hoc igitur est quod Archimedes pronunciavit; triangulum rectangulum

lum si latera, qualia diximus, habeat, circulo æquale esse. Neque profecto culpari meruit, quasi hoc in medium proferendo in leges Dialecticæ peccasset, pro concesso utens quod dubium et ignotum esset; quin potius admiratione dignus vel hoc ipso existimari debet, quod in quæstionibus difficillimis invento tam simplici et perspicuo uti resciverit. Ut autem dictum est, primum hoc theorema nullam dubitationem habet. Nam triangulum P O R majus esse dimidio figuræ A F O M; et omnino fieri posse, ut dato circulo rectilineum circumscribatur, ita ut, quæ inter circuli circumferentias, et circumscripti rectilinei latera segmenta interjiciuntur, dato spatio minora sint; perspicue dictum a nobis est in iis, quæ in primum librum de sphærâ et cylindro conscripsimus *.

PROP. II.

Circulus ad quadratum, quod a diametro describitur, eam rationem habet, quam 11 *ad* 14, *proxime.*

Sit circulus, cujus diameter A B; et circumscribatur eidem quadratum C G D; et lateris C D dupla sit D E; pars autem septima E F. Quoniam igitur triangulum



A C E ad triangulum A C D eam rationem habet, quam 21 ad 7; triangulum autem A E F ad triangulum A C D habet eam, quam 1 ad 7; ideo triangulum A C F ad
[a] 24. quinti. triangulum A C D se habet, ut 22 ad 7[a]. At vero triangulum A C D subquadruplum est quadrati C G; sive ad quadratum C G rationem habet, quam 7 ad 28: adeoque
[b] 22. quinti. A C F triangulum ad C G quadratum, ut 22 ad 28[b], seu 11 ad 14. Et triangulum A C F circulo A B est æquale; quoniam cathetus A C æqualis est ei, quæ ex centro, et basis ejusdem ambitui; qui quidem diametri triplus est,

* *Ad undecimam, credo, ejus libri. Cæterum triangulum* P O R *dimidio figuræ* A F O M *majus, ab ipso Archimede perspicue demonstratum est. Hoc autem demonstrato, fieri posse ut segmenta circuli peripheriæ ipsius et lateribus polygoni circumscripti intercepta, dato spatio minora sint, nullo negotio* 1ª *decimi confirmat.*

et adhuc excedit parte propemodum feptimâ, ut demonftrabitur. Circulus igitur ad quadratum C G eam habet rationem, quam 11 ad 14, proxime.

PROP. III.

Cujuflibet circuli ambitus diametri eft triplus, et adhuc excedit, minus quidem quam feptimâ diametri parte, majis vero quam decem feptuagefimis primis.

Sit circulus, cujus diameter A C, et centrum E, et Fig. 1. recta contingens C L F; fitque angulus F E C tertia pars anguli recti. Itaque E F ad F C eandem rationem habet, quam 306 ad 153; et E C ad C F majorem habet rationem quam 265 ad 153. Secetur angulus F E C in duas partes æquales rectâ E G. Ut igitur F E ad E C, ita fe habet F G ad G C[c]; et permutando, ut F E ad F G, ita[c] 3. fexti. E C ad C G; et ut utraque fimul F E, E C ad F C, ita fe habet E C ad C G[d]. Quare C E ad C G majorem rationem [d] 12. quinti. habet quam 571 ad 153. Igitur E G ad G C potentiâ quidem majorem habet rationem quam 349450 ad 23409; longitudine vero majorem quam $591\frac{1}{8}$ ad 153.

Rurfus fecetur angulus G E C in duas partes æquales rectâ E H. Igitur eâdem ratione E C ad C H majorem rationem habet quam $1162\frac{1}{8}$ ad 153. Igitur H E ad H C majorem rationem habet quam $1172\frac{1}{8}$ ad 153.

Amplius fecetur angulus H E C in duas partes æquales rectâ E K. Igitur E C ad C K majorem rationem habet quam $2334\frac{1}{4}$ ad 153. Igitur E K ad C K majorem rationem habet quam $2339\frac{1}{4}$ ad 153.

Secetur demum angulus K E C in duas partes æquales rectâ L E. Igitur recta E C ad L C majorem rationem habet quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153.

Quoniam igitur angulus F E C, tertia pars cum fit anguli recti, quater in duas æquas partes fectus eft; erit utique angulus L E C anguli recti pars octava et quadragefima. Itaque ponatur ad punctum E huic ipfi æqualis angulus C E M, et producatur F C ad punctum M. Eft igitur angulus L E M anguli recti pars quarta et vigefima. Propterea recta L M latus eft circumfcripti circulo polygoni latera habentis fex et nonaginta.

Quoniam igitur demonftratum eft E C ad C L majorem rationem habere quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153; et dupla quidem ipfius E C eft A C, dupla vero ipfius C L eft L M; ideo

ideo etiam A C ad L M majorem rationem habet quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Igitur etiam A C ad ambitum polygoni, latera habentis ſex et nonaginta, majorem rationem habet quam $4673\frac{1}{2}$ ad 14688. Igitur e contrario ambitus polygoni ad diametrum minorem rationem habet quam 14688 ad $4673\frac{1}{2}$. Atque horum numerorum alter alterius triplus eſt, et adhuc excedit unitatibus $667\frac{1}{2}$; quæ quidem minores ſunt quam ſeptima pars ipſius $4673\frac{1}{2}$. Quare ambitus polygoni circulo circumſcripti minor eſt quam triplus diametri cum parte ejuſdem ſeptimâ. Multo igitur magis circuli ambitus minor eſt quam triplus diametri cum parte ejuſdem ſeptimâ.

Fig. 2. Sit circulus, cujus diameter A C; ſitque angulus B A C tertia pars anguli recti. Igitur A B ad B C minorem rationem habet quam 1351 ad 780: ipſa autem A C ad C B habet eam, quam 1560 ad 780.

Secetur angulus B A C in duas partes æquales rectâ A G. Quoniam igitur æqualis eſt angulus B A G cum
e 27. tertii. angulo G C B [e], tum angulo G A C [f]; æqualis utique eſt
f per conſtruct. etiam angulus G C B angulo G A C. Communis eſt autem rectus angulus A G C. Æqualis eſt igitur et tertius angulus G F C tertio A C G. Quare æquiangulum eſt triangulum A G C triangulo C G F: ideoque ut A G ad G C, ita ſe habet cum C G ad G F, tum A C ad C F. Ut autem A C ad C F, ita ſe habet utraque ſimul C A, A B
g 3. ſexti. et ad B C [g]. Ut igitur utraque ſimul B A, A C ad B C, ita
12. quinti. etiam ſe habet A G ad G C. Et propterea A G ad G C minorem habet rationem quam 2911 ad 780: ipſa autem A C ad C G minorem quam $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ ad 780.

Secetur angulus C A G in duas partes æquales rectâ A H. Igitur eâdem ratione A H ad H C minorem rationem habet quam $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ ad 780, vel quam 1823 ad 240. Uterque enim utrinſque idem eſt ac $\frac{4}{13}$. Quare A C ad C H minorem rationem habet quam $1838\frac{9}{11}$ ad 240.

Amplius ſecetur angulus H A C in duas partes æquales rectâ K A. Igitur etiam K A ad K C minorem rationem habet quam $3661\frac{9}{11}$ ad 240; vel quam 1007 ad 66. Uterque enim utriuſque idem eſt ac $\frac{11}{40}$. Igitur A C ad C K minorem rationem habet quam $1009\frac{1}{6}$ ad 66.

Secetur demum angulus K A C in duas æquas partes rectâ L A. Igitur A L ad L C minorem habet rationem quam $2016\frac{1}{6}$ ad 66: ipſa autem A C ad C L minorem quam $2017\frac{1}{4}$ ad 66.

Igitur

Igitur e contrario L C ad C A majorem rationem habet quam 66 ad $2017\frac{1}{4}$. Et polygoni ambitus ad diametrum majorem habet rationem quam 6336 ad $2017\frac{1}{4}$. Atque horum numerorum alter alterius major eſt quam triplus cum decem partibus ſeptuageſimis primis. Quare ambitus polygoni, latera habentis ſex et nonaginta, circulo inſcripti major eſt quam triplus diametri cum decem ſeptuageſimis primis. Multo igitur magis circuli ambitus major eſt quam triplus diametri cum decem ejuſdem ſeptuageſimis primis.

Igitur circuli ambitus diametri eſt triplus et adhuc parte quâdam excedit, quæ minor quidem eſt ſeptimâ diametri parte, major vero decem ſeptuageſimis primis.

EUTOCIUS

In Tertium Theorema.

In hoc theoremate continue jubemur, dati numeri latus quadraticum invenire. Hoc autem in numero, qui quadratus non ſit, accurate inveniri non poteſt. Si enim numerum in ſeipſum ducas, quadratum aliquem numerum facies: ſin autem numerum et particulam, non facies numerum integrum, ſed numerum et particulam. Quomodo autem oporteat latus invenire, quod datum numerum quamproxime faciat, dictum eſt ab Herone in Metricis; dictum et a Pappo, Theone, aliiſque compluribus, qui Magnam Claudii Ptolemæi Compoſitionem explicârunt. Quare non eſt cur in eo laboremus, quod licet iis, qui ejuſmodi ſtudio tenentur, ex illis petere.

Sitque angulus C E F *tertia pars anguli recti.*] Nimirum ſi Fig. 1.
hexagoni circumferentia in duas partes æquales ſecetur, ejuſque dimidio C N inde a puncto C ſumpto, jungatur E N, et in rectam contingentem C F producatur; erit utique angulus C E F tertia pars anguli recti. Quæ enim circumferentia ad punctum C ſumpta eſt, cum dimidia ſit circumferentiæ hexagoni, erit circuli pars duodecima. Quare etiam angulus C E F, cum ſit ad centrum, duodecima erit quatuor rectorum angulorum, ideoque tertia recti unius anguli pars.

Itaque E F *ad* F C *eandem rationem habet, quam* 306 *ad* 153.] Duplam quidem eſſe E F ipſius F C ex hoc patet. Si enim F C producatur ad punctum O, ſumptâque rectâ C O huic ipſi C F æquali, alia jungatur a puncto E; erit angulus C E O angulo C E F æqualis. Pars igitur tertia recti. Verum cum in trian-

triangulo ECF ad C rectangulo, angulus acutus FEC pars tertia ſit recti, erit acutorum alter EFC recti beſſis. Similiter in triangulo ECO erit angulus EOC recti beſſis. Beſſis autem FEO. Tres igitur anguli trianguli FEO inter ſe æquales ſunt. Triangulum igitur æquilaterum eſt. Quapropter recta FC, quæ dimidia eſt rectæ FO, dimidia etiam erit ipſius EF. Et EF ad FC rationem habebit, quam binarius ad unitatem, ſive eam, quam 306 ad 153.

Et EC *ad* CF *majorem habet rationem quam* 265 *ad* 153.] Cum enim ponatur EF eſſe 306: ſi in ſe ipſum ducatur, fiet 93636. Eſt autem CF 153; ideoque quadratum, quod ab ipſâ deſcribitur, 23409. Quoniam igitur quadratum, quod ab EF deſcribitur, æquale eſt quadratis, quæ deſcribuntur ab EC, CF; ſi a quadrato, quod ab EF deſcribitur, hoc eſt, a 93636, quadratum auferatur, quod deſcribitur a CF, hoc eſt, 23409; reliquum erit quadratum, quod deſcribitur ab EC, hoc eſt, 70227. Cujus quidem latus quadratum eſt 265, et adhuc particula admodum exigua. Quod enim quadratum a 265 fit, id ab exquiſito rectæ EC quadrato deficit unitatibus duabus.

Multiplicationes autem ſubjiciuntur:

EF 306	FC 153	265
in 306	in 153	in 265
9....	1....	4....
18..	5...	12...
18..	3..	1...
36	5...	12...
	25..	36..
Qu. EF 93636	15.	3..
	3..	1...
	15.	3..
	9	25
	Qu. FC 23409	Qu. 70225
	Reliquum quadratum, quod ab EC deſcribitur, eſt 70227.	Deficit igitur ab exquiſito quadrato rectæ EC unitatibus duabus.

Secetur angulus FEC *in duas partes æquales rectâ* EG. *Ut igitur* FE *ad* EC, *ita ſe habet* FG *ad* GC.] Nimirum per tertium theorema libri ſexti Elementorum Euclidis. Et componendo, ut utraque ſimul FE, EC ad EC, ita FC ad CG. Et per-

permutando, ut utraque FE, EC ad FC, ita EC ad CG. Utraque autem EF, EC major eſt quam 571: nam ponitur FE 306; et EC 265, et adhuc quædam particula. Quare major eſt utraque ſimul quam 571. Ipſa autem FC eſt 153. Utraque igitur FE, EC ad FC majorem rationem habet quam 571 ad 153. Quare EC ad CG majorem rationem habet quam 571 ad 153.

Igitur EG *ad* GC *majorem potentiâ habet rationem quam* 349450 *ad* 23409.] Hoc autem ſic colligetur. Quoniam demonſtratum eſt, EC ad CG majorem rationem habere quam 571 ad 153; ſi quis poſuerit EC eſſe 571, et CG 153; erit utique quadratum quidem, quod ab EC deſcribitur, 326041; quadratum vero, quod deſcribitur a CG, 23409. Cum autem utraque æqualia ſint quadrato, quod deſcribitur ab EG, hoc ipſum erit 349450. Cujus quidem latus quadratum eſt $591\frac{1}{8}$ proxime. Quod enim quadratum a $591\frac{1}{8}$ fit, id ab exquiſito quadrato ex EG proxime deficit unitatibus $21\frac{1}{6}\frac{1}{15}$. Igitur EG ad GC poteſtate quidem majorem habet rationem quam 349450 ad 23409; longitudine vero, quam $591\frac{1}{8}$ ad 153.

Multiplicationes autem ſubjiciuntur:

EC 571	GC 153	$591\frac{1}{8}$
in 571	in 153	in $591\frac{1}{8}$
25....	1....	25....
35...	5...	45...
5..	3..	5..
35...	5...	$62\frac{1}{2}$
49..	25..	45...
7.	15.	81..
571	3..	9.
	15.	$11\frac{1}{4}$
Qu. EC, 326041	9	$591\frac{1}{8}$
		$62\frac{1}{2}$
	Qu. GC, 23409	$11\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{64}$
		Qu. $349428\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{64}$
		vel $349428\frac{49}{64}$ *
	Ex his colligitur qua-	Deficit igitur prox-

* *Nimirum* $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{64}=\frac{3}{4}+\frac{1}{64}=\frac{64\times3+4}{4\times64}=\frac{16\times3+1}{64}=\frac{49}{64}$.

dratum, quod ab EG describitur, 349450.

ime ab exquisito quadrato ex EG unitatibus $21\frac{1}{6}\frac{1}{15}$*.

Rursus secetur angulus GEC *in duas partes æquales rectâ* HE. *Eâdem ratione* EC *ad* CH *majorem rationem habet quam* $1162\frac{1}{8}$ *ad* 153.] Cum enim angulus GEC sectus in duas partes æquales sit; ut GE ad EC, ita se habet GH ad HC. Et componendo, et permutando ut utraque simul GE, EC ad GC, ita EC ad CH. Atque est ipsa quidem EC, 571, et adhuc quædam particula; ipsa vero EG, $591\frac{1}{8}$ et adhuc quædam particula. Igitur in unum collectæ majores sunt quam $1162\frac{1}{8}$. Est autem GC 153. Utraque igitur simul GE, EC ad GC majorem rationem habet quam $1162\frac{1}{8}$ ad 153. Quare etiam EC ad CH rationem habet majorem quam $1162\frac{1}{8}$ ad 153.

Igitur HE ad HC majorem rationem habet quam $1172\frac{1}{8}$ ad 153. Quoniam enim demonstratum est EC ad HC majorem rationem habere quam $1162\frac{1}{8}$ ad 153: si quis posuerit eas ita se habere; erit utique quadratum quidem, quod ab EC describitur, $1350534\frac{1}{2}\frac{1}{64}$; quadratum vero, quod describitur a CH, 23409. Quadratum igitur, quod ab EH describitur, cum æquale sit quadratis, quæ describuntur ab EC, CH, erit $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$. Cujus quidem latus quadratum est $1172\frac{1}{8}$ proxime. Quod enim quadratum ab ipso fit, id ab exquisito quadrato ex EH proxime deficit unitatibus $66\frac{1}{2}$.

Multiplicationes autem sequuntur:

* *Numero scilicet* 349450 *si mixtus (uti nunc loquimur)* $349428\frac{43}{64}$ *detractus fuerit, relinquetur mixtus* $21\frac{15}{64}$. *Hujus autem particula* $\frac{15}{64} = \frac{1}{6} + \frac{13}{192}$. *Sed* $\frac{13}{192}$ *particulam* $\frac{1}{15}$ *seu* $\frac{13}{195}$ *exiguo admodum exuperat.*

EC

EC	$1162\frac{1}{8}$	HC	153		$1172\frac{1}{8}$
in	$1162\frac{1}{8}$	in	153	in	$1172\frac{1}{8}$
	1......		1....		1......
	1.....		5...		1.....
	6....		3..		7....
	2...		5...		2...
	125		25..		125
	1.....		15.		1.....
	1....		3..		1....
	6...		15.		7...
	2..		9		2..
	$12\frac{1}{2}$				$12\frac{1}{2}$
	6....	Qu. HC,	23409		7....
	6...				7...
	36..				49..
	12.				14.
	$7\frac{1}{2}$				$8\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
	2...				2...
	2..				2..
	12.				14.
	$4\frac{1}{4}$				$4\frac{1}{4}$
	$145\frac{1}{4}\frac{1}{64}$				$146\frac{1}{2}\frac{1}{64}$
Qu. EC,	$1350534\frac{1}{2}\frac{1}{64}$			Qu.	$1373877\frac{1}{64}$

Quadratum, quod ab EH describitur, æquale quadratis, quæ describuntur ab EC, CH, est $1373943\frac{1}{2}\frac{1}{64}$.

Deficit igitur ab exquisito quadrato ex EH unitatibus $66\frac{1}{2}$.

Amplius secetur angulus HEC *in duas partes æquales rectâ* EK. *Igitur* EC *ad* CK *majorem rationem habet quam* $2334\frac{1}{4}$ *ad* 153.] Rursus enim, cum angulus HEC sectus in duas partes æquales sit; ut HE ad EC, ita se habet HK ad CK. Et componendo, ut utraque simul HE, EC ad EC, ita CH ad CK. Et permutando, ut utraque simul HE, EC ad CH, ita EC ad CK. Et quoniam demonstratum est, HE quidem esse $1172\frac{1}{8}$ et adhuc quandam particulam; EC vero, $1162\frac{1}{8}$, et adhuc quandam particulam; ideo utraque simul HE, EC major est quam $2334\frac{1}{4}$. Ponitur autem HC esse 153. Igitur utraque simul HE, EC ad HC majorem rationem habet quam $2334\frac{1}{4}$ ad 153. Quare et EC ad CK majorem rationem habet quam $2334\frac{1}{4}$ ad 153.

Igitur EK *ad* CK *majorem rationem habet quam* $2339\frac{1}{4}$ *ad* 153.] Rursus enim, quoniam ponitur EC quidem esse $2334\frac{1}{4}$; CK vero, 153; erit utique quadratum, quod ab EC de-

defcribitur, $5448723\frac{1}{16}$; et quadratum, quod defcribitur a CK, 23409. Quibus cum æquale fit quadratum, quod defcribitur a KE, hoc ipfum erit $5472132\frac{1}{16}$. Cujus quidem latus quadratum eft $2339\frac{1}{4}$ proxime. Quod enim quadratum ab ipfo fit, id ab exquifito quadrato ex EK deficit unitatibus $41\frac{1}{2}$.

Multiplicationes autem fubjiciuntur:

EC $2334\frac{1}{4}$	CK 153	$2339\frac{1}{4}$
in $2334\frac{1}{4}$	in 153	in $2339\frac{1}{4}$
4......	1....	4......
6.....	5...	6.....
6....	3..	6....
8...	5...	18...
5..	25..	5..
6.....	15.	6.....
9....	3..	9....
9...	15.	9...
12.	9	27..
75		75
6....	Qu. CK, 23409	6....
9...		9...
9..		9..
12..		27.
$7\frac{1}{2}$		$7\frac{1}{2}$
8...		18...
12..		27..
12.		27.
16		81
1		$2\frac{1}{4}$
$583\frac{1}{2}\frac{1}{16}$		$584\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16}$
Qu. EC, $5448723\frac{1}{16}$		Qu. $5472090\frac{1}{2}\frac{1}{16}$

Ex his colligitur quadratum, quod ab EK defcribitur, $5472132\frac{1}{16}$.

Deficit igitur ab exquifito quadrato ex EK unitatibus $41\frac{1}{2}$.

Secetur demum angulus KEC *in duas partes æquales rectâ* EL. *Igitur* EC *ad* CL *majorem rationem habet quam* $4673\frac{1}{2}$ *ad* 153.] Rurfus enim, cum angulus KEC fectus in duas partes æquales fit; ut KE ad EC, ita fe habet KL ad LC. Et componendo, ut utraque fimul KE, EC, ad EC, ita KC ad CL. Et permutando, ut utraque fimul KE, EC ad KC, ita EC ad LC. Atqui eft ipfa quidem KE $2339\frac{1}{4}$, et adhuc quædam particula; ipfa vero EC $2334\frac{1}{4}$, et adhuc quædam particula. Igitur KE, EC in unum collectæ majores funt quam $4673\frac{1}{2}$. Eft autem

KC

K C 153. Utraque igitur ſimul E K, E C ad K C majorem rationem habet quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Ut autem utraque ſimul K E, E C ad K C, ita ſe habet E C ad C L. Igitur etiam E C ad C L majorem rationem habet quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153.

Quoniam igitur angulus F E C, tertia pars cum ſit anguli recti, duodecima pars eſt quatuor rectorum angulorum; atque hujus dimidius G E C eorumdem pars quarta et vigeſima; et amplius hujus dimidius H E C octava et quadrageſima; et amplius hujus dimidius K E C ſexta et nonageſima; erit utique poſtremi hujus dimidius L E C quatuor rectorum pars centeſima nonageſima ſecunda.

Ponatur igitur, inquit, huic ipſi æqualis angulus C E M, et producatur F C ad punctum M. Igitur angulus L E M, quippe duplus anguli L E C, ſexta et nonageſima eſt quatuor rectorum angulorum pars. Propterea L M latus eſt circumſcripti circulo polygoni latera habentis ſex et nonaginta.

Quoniam igitur demonſtratum eſt, E C ad C L majorem rationem habere quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153; et dupla quidem ipſius E C eſt A C; dupla vero ipſius L C eſt L M: ideo etiam A C ad L M majorem rationem habet quam $4673\frac{1}{2}$ ad 153. Igitur e contrario L M ad A C minorem habet rationem quam 153 ad $4673\frac{1}{2}$. Et quoniam L M latus eſt polygoni latera habentis ſex et nonaginta, ejus ambitus eſt 14688: ſi enim 96 in 153 duxeris, hunc numerum facies. Igitur polygoni ambitus ad diametrum A C minorem rationem habet quam 14688 ad $4673\frac{1}{2}$. Propterea minor eſt quam triplus diametri circuli, cum unitatibus $667\frac{1}{2}$. Hæ autem minores ſunt quam ſeptima pars diametri, ſeptimâ unitatis parte. Nam ſeptuplum unitatum $667\frac{1}{2}$, hoc eſt, $4672\frac{1}{2}$, minus eſt quam diameter unitate. Quoniam igitur polygoni ambitus minor eſt quam triplus diametri cum ſeptimâ ejuſdem parte; minorque circuli ambitus quam polygoni; ideo multo magis ambitus circuli minor quam triplus diametri cum ſeptimâ ejuſdem parte.

Deinde vero conſtruens reliquam theorematis partem: Sit, inquit, circulus, cujus diameter A C; ſitque angulus B A C tertia pars anguli recti. Hoc autem fiet, ſi a puncto C ſumptâ C B hexagoni circumferentiæ æquali, jungatur A B. Qui enim angulus conſtituitur ſuper hexagoni circumferentiâ, ſi ad centrum quidem conſtituitur, idem eſt ac duæ tertiæ partes anguli recti; ſi vero ad circumferentiam, idem ac pars tertia. Fig. 2.

Si igitur producatur C B ad punctum B, erit A C ipſius C B dupla. Quod ex elementis conſtat: cum latus hexagoni, circulo inſcripti, dimidio diametri æquale ſit [h]. Quare ſi ponatur A C

[h] 15. quarti.

A C esse 1560; erit C B 780. Atque erit quadratum quidem, quod ab A C describitur, 2433600; quadratum vero, quod describitur a C B, 608400. Et si auferatur a quadrato, quod ab A C describitur, quadratum, quod describitur a C B; reliquum erit quadratum, quod describitur ab A B, 1825200. Cujus quidem latus quadratum est 1351 proxime. Quod enim quadratum ab hoc fit, id exquisitum quadratum ex A B excedit solâ unitate. Quocirca A B ad B C minorem, inquit, rationem habet quam 1351 ad 780.

Multiplicationes autem subjiciuntur:

A C 1560	C B 780	1351
in 1560	in 780	in 1351
1......	49....	1......
5.....	56...	3.....
6....	56...	5....
5.....	64..	1...
25....		3.....
30...	Qu. C B, 608400	9....
6....		15...
30...		3..
36..		5....
		15...
Qu. A C, 2433600		25..
		5.
		1351
		Qu. 1825201
	Ex his efficitur quadratum ex A B 1825200.	Excedit igitur exquisitum quadratum ex A B solâ unitate.

Secetur angulus B A C *in duas partes æquales rectâ* A F G.] Quoniam igitur æqualis est angulus B A G cum angulo G C B (nam eidem circumferentiæ insistunt) tum angulo G A C; æqualis utique est etiam angulus G C B angulo G A C. Communis est autem rectus angulus A G C. Æqualis est igitur et reliquus angulus G F C reliquo A C G. Quare æquiangulum est triangulum A G C triangulo C G F: ideoque ut A G ad G C, ita se habet C G ad G F. Æquiangulorum enim triangulorum latera proportionalia sunt, eaque sibi invicem respondent, quæ æqualibus angulis subjiciuntur. Pari ratione, ut A G ad A C, ita est G C ad C F. Permutando igitur ut A G ad G C, ita est A C ad C F.

C F. Ut A G igitur ad G C, ita ſe habet cum C G ad G F, tum A C ad C F.

Ut autem A C *ad* C F, *ita ſe habet utraque etiam* B A, A C *ad* B C. Quoniam enim angulus B A C ſectus in duas partes æquales eſt ab A F; ut B A ad A C, ita ſe habet B F ad F C. Et componendo, ut utraque ſimul B A, A C ad A C, ita B C ad C F. Et permutando, ut utraque ſimul B A, A C ad B C, ita A C ad C F.

Et propterea A G *ad* G C *minorem habet rationem quam* 2911 *ad* 780; *ipſa autem* A C *ad* C G *minorem quam* $3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ *ad* 780.] Namque A B quidem minor eſt quam 1351; A C vero eſt 1560; denique B C 780. Utraque igitur ſimul A B, A C ad B C minorem rationem habet quam 2911 ad 780. Quare etiam A C ad C F minorem rationem habet quam 2911 ad 780. Ut autem A C ad C F, ita ſe habet A G ad G C. (Id enim oſtenſum.) Igitur etiam A G ad G C minorem rationem habet quam 2911 ad 780. Hæc cum ita ſint, quadratum quidem, quod ab A G deſcribitur, minus erit quam 8473921; cum quadratum, quod deſcribitur a G C, ſit 608400. Quibus duobus cum æquale ſit quadratum quod deſcribitur ab A C, hoc ipſum minus erit quam 9082321. Cujus quidem latus quadratum eſt $3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ proxime. Quod enim quadratum ab ipſo fit, id excedit illud, quod pro quadrato ex A C uſurpatum eſt, unitatibus $368\frac{1}{16}$. Et propterea dicit: A C ad C G minorem rationem habet quam $3013\frac{1}{2}\,\frac{1}{4}$ ad 780.

Multiplicationes autem ſequuntur:

AG 2911	GC 780	$3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
in 2911	in 780	in $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
4......	49....	9......
18.....	56...	3....
2....	56...	9...
2...	64..	15..
18.....		75.
81....	Qu. GC, 608400	3....
9...		1..
9..		3.
2....		5
9...		$2\frac{1}{2}$
1..		9...
1.		3.
2911		9
		$1\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
Qu. AG, 8473921		$1506\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{8}$
		$753\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$
		Qu. $9082689\frac{1}{16}$

Ex quadratis igitur ex AG, GC efficitur quadratum ex AC 9082321.

Excedit igitur exquisitum quadratum ex AC unitatibus $368\frac{1}{16}$.

Secetur angulus CAG *in duas partes æquales rectâ* AH. *Igitur eâdem ratione &c.*] Cum enim angulus CAG sectus in duas partes æquales sit; utique, propter triangulorum similitudinem, laterumque proportionem, se habebit, componendo et permutando, ut utraque simul GA, AC ad GC, ita AH ad HC. Ponitur autem AG minorem esse quam 2911; et AC minorem quam $3013\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Utraque igitur simul GA, AC minor est quam $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$. Atqui est GC 780. Igitur utraque simul GA, AC ad GC minorem rationem habet quam $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ ad 780. Quare etiam AH ad HC minorem habet rationem quam $5924\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ ad 780: ideoque minorem etiam, quam $455\frac{1}{2}\frac{1}{4}$ ad 60 (quorum uterque utriusque pars est decima tertia). Minorem igitur quam 1823 ad 240. Hi enim priorum (partium decimarum tertiarum) uterque utriusque sunt quadrupli. Et hoc est quod dicit, utrumque utriusque idem esse ac $\frac{4}{13}$. Cum autem AH sit 1823, erit quadratum, quod ab eâ describitur, 3323329: cumque HC sit 240, quadratum, quod ab eâ describitur, erit 57600. Quibus duobus cum æquale sit quadratum, quod describitur ab AC, hoc ipsum erit 3380929. Cujus quidem latus quadratum est $1838\frac{9}{11}$

$1838\frac{9}{11}$ proxime. Quod enim quadratum ab ipſo fit, id exquiſitum quadratum excedit proxime unitatibus 323. Quare A C ad H C minorem rationem habet quam $1838\frac{9}{11}$ ad 240.

Multiplicationes autem ſubjiciuntur:

AH 1823
in 1823
———
1 . . . . . .
8 . . . . .
2 . . . .
3 . . .
8 . . . . .
64 . . . .
16 . . .
24 . .
2 . . . .
16 . . .
4 . .
6 .
3 . . .
24 . .
6 .
9
———
Qu. A H, 3323329

C H 240
in 240
———
4 . . . .
8 . . .
8 . . .
16 . .
———
Qu. C H, 57600

$1838\frac{9}{11}$
$1838\frac{9}{11}$
———
1 . . . . . .
8 . . . . .
3 . . . .
8 . . .
$818\frac{2}{11}$
8 . . . . .
64 . . . .
24 . . .
64 . .
$654\frac{6}{11}$
3 . . . .
24 . . .
9 . .
24 .
$24\frac{6}{11}$
8 . . .
64 . .
24 .
64
$6\frac{6}{11}$
$818\frac{2}{11}$
$654\frac{6}{11}$
$24\frac{6}{11}$
$6\frac{6}{11}\frac{81}{121}$
———
Qu. $3381251\frac{7}{11}\frac{81}{121}$
ſive $3381252\frac{37}{121}$*

Ex quadratis igitur ex A H, H C efficitur quadratum ex A C 3380929.

Excedit igitur exquiſitum quadratum ex A C unitatibus 323 cum particulâ.

* *Nimirum numeri mixti* $3381251\frac{7}{11}\,\frac{81}{121}$ *pars fractionalis* $\frac{7}{11}+\frac{81}{121}=\frac{77+81}{121}=\frac{158}{121}=1+\frac{37}{121}$. *Quapropter mixtus* $3381251\frac{7}{11}\,\frac{81}{121}$ *mixto* $3381252\frac{37}{121}$ *æqualis eſt.*

Amplius

Amplius secetur angulus H A C *in duas partes æquales rectâ* K A.] Rursus cum angulus H A C sectus in duas partes æquales sit; utique, propter triangulorum similitudinem, laterumque proportionem, se habebit, componendo et permutando, ut utraque simul H A, A C ad C H, ita A K ad K C. Utraque autem simul H A, A C minor est quam $3661\frac{9}{11}$ (nam ponitur H A minorem esse quam 1823; et A C minorem quam $1838\frac{9}{11}$) atqui est H C 240. Igitur utraque simul H A, A C ad H C minorem rationem habet quam $3661\frac{9}{11}$ ad 240. Quare etiam A K ad K C minorem rationem habet quam $3661\frac{9}{11}$ ad 240. At partes $\frac{11}{40}$ numeri $3661\frac{9}{11}$ idem sunt ac 1007; numerique 240 idem ac 66. Igitur A K ad K C minorem rationem habet quam 1007 ad 66. Quadratum igitur, quod ab A K describitur, minus erit quam 1014049; si quadratum, quod describitur a K C, sit 4356. Quibus cum æquale sit quadratum, quod describitur ab A C, hoc ipsum minus erit quam 1018405. Cujus quidem latus quadratum est $1009\frac{1}{6}$ proxime. Quod enim quadratum ab hoc latere sit, id excedit quod pro exquisito quadrato ex ipsâ A C usurpavimus unitatibus $12\frac{1}{3}\frac{1}{36}$. Igitur A C ad C K minorem rationem habet quam $1009\frac{1}{6}$ ad 66.

Multiplicationes autem subjiciuntur:

A K 1007	K C 66	$1009\frac{1}{6}$
in 1007	in 66	$1009\frac{1}{6}$
1	36 . .	1 . . . . . .
7 . . .	36 .	9 . . .
7 . . .	36 .	$166\frac{1}{2}\frac{1}{6}$
49	36	9 . . .
		81
Qu. A K, 1014049	Qu. K C, 4356	$1\frac{1}{2}$
		$166\frac{1}{2}\frac{1}{6}$
		$1\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{6}$
		Qu. $1018417\frac{1}{3}\frac{1}{36}$

Ex quadratis igitur ex A K, K C efficitur quadratum ex A C 1018405.

Excedit exquisitum quadratum unitatibus $12\frac{1}{3}\frac{1}{36}$.

Secetur demum angulus K A C *in duas partes æquales rectâ* A L.] Eâdem ratione, ut utraque simul K A, A C ad K C, ita se habet A L ad L C. Atqui est A K quidem minor quam 1007; A C vero minor quam 1009, ; cum K C est 66. Utraque igitur simul K A, A C ad K C minorem rationem habet quam $2016\frac{1}{6}$ ad 66. Igitur etiam A L ad L C minorem habet rationem quam $2016\frac{1}{6}$ ad

ad 66. Quare quadratum, quod ab A L describitur, minus erit quam $4064928\frac{1}{36}$; si quadratum, quod describitur ab L C, fit 4356. Quibus cum æquale sit quadratum, quod describitur ab A C, hoc ipsum erit minus quam $4069284\frac{1}{36}$. Cujus quidem latus quadratum est $2017\frac{1}{4}$ proxime. Quod enim quadratum ab ipso fit, id exquisitum quadratum proxime excedit unitatibus $13\frac{1}{2}\frac{1}{29}$. Quare A C ad C L minorem rationem habet quam $2017\frac{1}{4}$ ad 66.

Multiplicationes autem subjiciuntur:

A L $2016\frac{1}{6}$	L C 66	$2017\frac{1}{4}$
in $2016\frac{1}{6}$	in 66	in $2017\frac{1}{4}$
4	36 . .	4 . . . . . .
2	36 .	2 . . . .
12 . . .	36 .	14 . . .
$333\frac{1}{3}$	36	5 . .
2	Qu. L C, 4356	2 . . . .
1 . .		1 . .
6 .		7 .
$1\frac{1}{2}\frac{1}{6}$		$2\frac{1}{2}$
12 . . .		14 . . .
6 .		7 .
36		49
1		$1\frac{1}{2}\frac{1}{4}$
$333\frac{1}{3}$		5 . .
$1\frac{1}{2}\frac{1}{6}$		$2\frac{1}{2}$
$1\frac{1}{36}$		$1\frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{16}$
Qu. A L, $4064928\frac{1}{36}$		Qu. $4069297\frac{1}{2}\frac{1}{16}$

Quadratum his duobus ex A L, L C æquale, quod ab A C describitur, est $4069284\frac{1}{36}$.

Excedit proxime exquisitum quadratum ab A C unitatibus $13\frac{1}{2}\frac{1}{29}$.*

* *Nimirum mixto* $4069297\frac{1}{2}\frac{1}{16}$ *auferatur mixtus* $4069284\frac{1}{36}$, *relinquetur mixtus* $13\frac{9}{16}-\frac{1}{36}$. *Cujus pars fractionalis* $\frac{9}{16}-\frac{1}{36}$ $=\frac{36\times 9-16}{16\times 36}=\frac{9\times 9-4}{4\times 36}=\frac{77}{144}$. *Sed* $\frac{77}{144}=\frac{154}{288}=$ $\frac{144+10}{288}=\frac{1}{2}+\frac{10}{288}$. *Et* $\frac{10}{288}$ *exiguo admodum exsuperat* $\frac{1}{29}$.

Quoniam

Quoniam igitur A C ad C L minorem rationem habet quam $2017\frac{1}{4}$ ad 66; e contrario L C ad C A majorem habet rationem quam 66 ad $2017\frac{1}{4}$. Et quoniam circumferentia C B ſexta eſt totius circuli pars; erit utique G C pars duodecima; H C, quarta et vigeſima; K C, octava et quadrageſima; denique L C, ſexta et nonageſima. Quare recta L C polygoni latus eſt latera habentis ſex et nonaginta. Atqui eſt L C 66. Igitur polygoni ambitus ad diametrum circuli majorem rationem habet quam 6336 ad $2017\frac{1}{4}$. Horum autem numerorum alter alterius triplus eſt, et adhuc excedit unitatibus $284\frac{1}{4}$; quæ quidem majores ſunt quam decem ipſius $2017\frac{1}{4}$ ſeptuageſimæ primæ. Pars utique ſeptuageſima prima eſt $28\frac{2}{5}\frac{3}{250}$ proxime; atque hujus decuplum $284\frac{3}{25}$. Multo igitur magis circuli ambitus major eſt quam triplus diametri cum decem ſeptuageſimis primis.

Itaque numeri ab eo poſiti, ut fieri potuit, mediocriter explicati ſunt.

Scire autem oportet Apollonium Pergæum in Ocytocio idem per numeros alios demonſtraſſe, et rem vero propinquiorem reddidiſſe. Quod quidem exquiſitius eſſe videtur: ſed tamen ad id, quod Archimedes ſibi propoſuit, nihil confert. Diximus enim eum ſibi in hoc libro propoſuiſſe, quod vero propinquum eſt, invenire, propter neceſſarios vitæ uſus. Propterea neque Porus Nicænus merito videtur Archimedem reprehendere, quod non accurate invenerit, cui rectæ lineæ circuli circumferentia ſit æqualis. Hinc in Favis idem ait, Præceptorem ſuum, Philonem intelligens Gadarenſem, rem ad accuratiores numeros perduxiſſe, quam ii ſunt, quos Archimedes propoſuit; id eſt, 7 et 22. Omnes enim pariter videntur ejus propoſitum ignoraſſe. Utuntur autem myriadum multiplicationibus, et diviſionibus, quas non facile aſſequetur*, qui in Magni Logiſticis verſatus non fuerit. Quod ſi quis omnino vellet rem ad minimum redigere, opus eſſet, ut ea probe aſſecutus, quæ in Mathematicâ Claudii

* *Profecto adhibitis notis numerorum Indicis, quibus nos hodie utimur, nihilo difficilius Myriades vel Myriadum etiam Myriades tractantur, quam minores numeri, modo artificio quodam ſatis obvio inter operandum quis utatur (in figuris nimirum collocandis) quod cum Eutocius neglexerit, in immenſum ei cum labor tum ſpatium ipſum operis excrevit. Hoc autem ex typo operæ elegantius concinnatæ quivis intelliget.*

Numerus 3381252 *in ſe ſit multiplicandus:*

3381252

Ptolemæi Compoſitione traduntur, per partes et minutias †, et per rectas lineas in circulo aptatas, id faceret. Atque id ego

3381252
in 3381252

9943656
2 1
9943656
2 1
24448606
26 141
3381252
6662404
1 1
15505050
14 121
6662404
1 1

11432865087504

Si numerus mixtus mixto multiplicandus ſit, peracta partium integralium multiplicatione, pars utriuſque fractionalis in alterius integralem multiplicanda eſt: tum fractionales in ſe mutuo: denique ſumma omnium colligenda.

Quod ſi numerus mixtus in ſe multiplicandus eſt, ut quadratus fiat, dupla pars fractionalis multiplicanda eſt in integralem; pars quoque fractionalis in ſe, factique cum facto ex integrali in unam ſummam colligendi. Hoc etiam exemplo ex Eutocianis illuſtrare placet.

Mixtus $1838\frac{9}{11}$ *in ſe multiplicandus:*

$1838\frac{9}{11}$
$1838\frac{9}{11}$

1838
8444
626
3494
2 2
8444
626

3378244 $\qquad \frac{2 \times 9}{11} = 1\frac{7}{11}$

$1838 \times 1 = 1838$
$\times \frac{7}{11} = 1169\frac{7}{11}$
$\frac{9}{11} \times \frac{9}{11} = \frac{81}{121}$

$3381251\ \frac{7}{11}\ \frac{81}{121}$
ſive $3381252\ \frac{37}{121}$

Atque

ſane feciſſem, niſi, quod ſæpius dixi, intellexiſſem, fieri non poſſe, ut per ea, quæ hic propoſita ſunt, recta linea accurate inveniatur circuli circumferentiæ æqualis. Et ſi quis eo contentus ſit, quod proximum vero eſt, ſuffecerint ea, quæ hic ab Archimede tradita ſunt.

Atque notis numeralibus Indorum adhibitis, quæ nobis ſunt in uſu, hæc eſſet in multiplicationibus, quemadmodum Veteres inſtituebant, operandi ratio; noſtræ (cujus plane inverſa eſt) parum ſimplicitate cedens, cum ab erroris periculo tutior ſit. Neque reſpuit compendia calculi decimalis. Hoc etiam exemplo confirmare non pigebit.

Numerus mixtus 739,4856731 *in mixtum* 21,5634227 [1] *multiplicandus ſit, ita ut ſiſtatur calculus in tertio decimalium loco:*

```
739,485673
 21,563423
----------
147521841
  342212
  6358927
   11 1
 1895477
    4523
   84043
     221
   16800
      45
    1058
       2
     129
      14
       1
----------
15945,8420
```

1 Vid. Arithmetic of Fractions, p. 76.

† "—partes et minutias" i. e. *gradus et ſcrupulos* (degrees, minutes, ſeconds, &c.) *Namque* μοῖραι *Ptolemæo ſunt gradus,* λεπτὰ *particulæ ſexageſimales.*

CRIBRUM ERATOSTHENIS

AD

NUMEROS PRIMOS OMNES ORDINE INVENIENDOS

SAMUELIS EPISCOPI ASAPHENSIS

OPERA RESTITUTUM.

DE CRIBRO ERATOSTHENIS.

DEFINITIONES.

Definitio I.

PRIMUS numerus eſt, quem unitas ſola metitur. Deff. 11, 12, 13, 14. ſeptimi.

II.

Primi inter ſe numeri ſunt (πρὸς ἀλλήλους), quos ſola unitas communis menſura metitur.

III.

Compoſitus numerus eſt, quem numerus aliquis metitur.

IV.

Compoſiti inter ſe numeri ſunt (πρὸς ἀλλήλους), quos numerus aliquis communis menſura metitur.

Poſitis autem hiſce, invenire quoad numeros, quinam inter ſe primi ſunt, vel inter ſe compoſiti, facillimum eſt, et res nullius fere negotii. Quomodo fiat enim, oſtendunt *Euclidis Elementorum lib. vii.* propoſitiones tres priores, et docent fere omnes, qui vel *Arithmeticæ*, vel artis *Algebraicæ* præcepta tradiderunt. Illud e contra invenire quoad datum quemvis numerum, utrum primus ſit necne, ἁπλῶς dico, et nullâ aliorum inter quos primus eſt, vel eſſe poſſit, ratione habitâ, id non tam in proclivi eſt. Imo methodo aliquâ directâ hoc efficere fruſtra, ut opinor, aggrediuntur

 homines.

homines. Quare neque aliquis adhuc rem ita abfolutam dedit, aut tabulæ fynthefin oftendit, quâ includerentur numeri primi omnes, de quibus a priori quod aiunt, per demonftrationem conftaret, eos generis aut ordinis iftius numeros èffe. Quomodo autem per methodum indirectam, feriatim in initio difpofitis numeris imparibus, et calculum fcite adhibendo, numeri primi tandem aliquando a compofitis internofcerentur, id perfpexiffe dicitur magnus ille e *Scholæ Alexandrinæ* philofophis *Eratofthenes*; quin et artificio ejus quafi ab operationis fimilitudine nomen inditum eft, Κόσκινον five *Cribrum Eratofthenis*. Et hoc ipfum eft igitur, de quo jam quærimus, quid nimirum et quale illud fuiffe revera exiftimandum eft; exiles enim et perquam anguftæ funt, quæ ad nos devenerunt, rei ipfius notitiæ; tum autem, quod pejus eft, a veritate longiffime abeffe videntur ea, quæ de fubtili hoc *Eratofthenis* invento fomniârunt interpretes.

Eccam enim quæ nomine *Eratofthenis* infignitur tabulam, et pro *Cribro* ejus circumfertur, quam ad finem *Arati* apud *Oxonienfes* editi videre eft, ubi etiam adjecta funt e *Nicomachi Gerafini Ifagoge Arithmeticâ*, et e *Boethio*, qui opus hoc in compendium redegit, quæ ad *Cribrum* hoc, de quo agitur, fpectant. Quorfum hæc evadunt interea, vel potius, quam omnino nihil vel referant, vel doceant, quod ab *Eratofthene* profluxiffe judicandum eft, facile quis pro fe intelligat. Totius enim rei, quatenus ibi exponitur, hæc fumma eft, tam πινάκος ipfius, quam eorum, quæ in eam commentus eft, omnia fatis pro arbitrio fuo, *Nicomachus*. Agitur ab eo in initio de numeris primis et compofitis, et de eorum difcrimine, fufe proculdubio et longâ rei enarratione, neque tamen ubique accurate, aut præfinite ita, uti quæftio tractanda erat. Tabulam deinde confici jubet, quæ numeros omnes impares feriatim difpofitos habeat fingulos cancellis fuis inclufos, et obelo fignari numeros omnes compofitos. Omnia inde in propatulo—fiquidem ita eveniat, omnes, qui obelifmo non fublati funt, reftare numeros primos, feorfim et uno intuitu agnofcendos.

Tantum interea his omnibus tribuendum eft quantum tribui debeat, modo ad præfcriptum quis poterit, quæ imperata funt, abfolvere omnia. Ita etenim certiffime,

ut

ut pernoſcamus quinam numeri ſint primi, non *Œdipo* opus erit qui expiſcaretur eos, ſed rem omnem intelligat, qui oculis tantummodo non conniventibus tabulam inſpecturus eſt. Abſit omnino autem, ut hujuſcemodi aliquid tam puerile pæne dixerim et inficetum, vel *Eratoſthenis* εὕρημα exiſtimetur, vel quod aliquâ ex parte etiam, ad mentem ejus et conſilium excogitatum eſt. Etenim in ipſo limine multa quærimus, et edoceri volumus, quâ demum regulâ, aut quibus ratiociniis numeros compoſitos ab aliis dignoſcamus, eum in finem ſcilicet, ut rite adhibeatur iis obeliſmus ille, quo ex ordine deturbandi ſunt, vel unde omnino conſtet eos ipſos, qui in datâ tabulâ eliminati ſunt, recte et legitime, non injuriâ, amotos eſſe. Altum autem de his omnibus apud interpretes noſtros ſilentium. Tabula conficienda proponitur, et confecta oſtenditur, quomodo autem vel quibus ſubſidiis, nihilo magis conſtat, quam quâ arte præſtigiator aliquis, quicquid depoſcitur, inhianti popello oſtendit, e nubibus nimirum, uti juſſeris, vel ex inferis arceſſitum. Neſcio quid inſuper a ſcopo et hic etiam aberrans, de compoſitis numeris omnes ſuos diviſores apponendo hariolatur *Nicomachus*, et de notis ſpecialibus eos indicando, quod neque ſatis commode fieri poteſt (in tantum enim diviſorum eorum cenſus, et tam protinus excurreret) neque ſi factum eſſet, aliquâ ex parte promoveret illud, quod, ut nobis videtur, aſſequi voluit *Eratoſthenes Cribri* ſui auxilio.

Sed in nugis hujuſcemodi et ambagibus Tyrones diutius non moror. Qui de commentis vel *Nicomachi* vel *Boethii* plura ſcire exoptat, adeat, ſi velit, quæ a nobis jam olim de his ipſis uberius expoſita ſunt apud *Ephemeridas Societatis Regiæ Londinenſis anno* 1772, unde et quicquid etiam de quæſtione hâc jam diſputatum eſt, veluti in penu noſtrâ adveximus.

Quod hujuſce loci interea eſt, melioribus, uti ſpes eſt, auſpiciis conſilium *Eratoſthenis* de *Cribro* ſuo exponere jam pergimus, modo illud prius dictum fuerit, non tabulam eum noſtro ſaltem judicio, quaſi ἀγύρτην aliquem aliis oſtentaſſe, quæ mirabilia quædam indicaret; ſed a principiis legitimis et mathematicis κανόνα quendam ſeu regulam confinxiſſe, quâ a ſerie numerorum uti opus eſt ordinatâ, eliminatis et quaſi excuſſis numeris compoſitis, numeri primi tanquam *Cribro* ſeparati ſe-

 orſim

orsim sisterentur. Quod et ipsâ eâ indagine, et iis operationibus quæ jam traditurus sum, ab *Eratosthene* olim confectum fuisse nullus dubito. Primo enim ope regulæ nostræ, quod faciendum est, certissime efficitur. Deinde suo ordine omnia et per rectam ratiocinationem fini proposito inserviunt. Denique methodus ipsa simplex et concinna est, cujus auctorem itaque ponere *Eratosthenem*, eruditum hominem ut erat apprime et *Matheseos* studiosum, neutiquam pudori sit.

En autem Problema ipsum cum ejus resolutione.

PROBLEMA.

In serie numerorum ad datum quemvis terminum productâ invenire omnes numeros primos.

LEMMA I.

Numerus binarius primus est, neque tamen præter eum e numeris paribus alius quivis; alios enim pares omnes metitur numerus binarius, quare numeri compositi sunt.

LEMMA II.

Primi numeri omnes, excepto binario, ut ex præmissis manifestum est, alicubi inveniendi sunt in serie numerorum imparium in infinitum productâ.

LEMMA III.

Numerus quivis, qui non primus est, primi alicujus multiplex est (El. vii. 33.) Seriem itaque numerorum imparium patet semper constare ex numeris primis, et primorum multiplicibus; i. e. numeris compositis.

LEMMA IV.

Si exponatur series numerorum imparium ordine se insequentium, numeri cujusvis multiplices certâ lege et præfinitis intervallis se invicem semper subsequuntur. Sit enim series numerorum imparium hæcce,

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. 57. 59, &c.

Inter numerum ternarium, et primum ejus multiplicem (9) interpositi sunt numeri bini, inter 9 et ternarii

narii multiplicem, qui proxime fubfequitur, fcilicet 15, duos item interpofitos habes, inter 15 et 21 itídem duos, et ita deinceps. Rurfum inter numerum 5 et primum ejus multiplicem 15 interveniunt numeri quatuor, qui ipfius 5 non funt multiplices; inter 15 et numerum ipfius 5 proxime multiplicem habes item quatuor, et ita deinceps. Simili modo, et inter binos quofvis proxime fe fubfequentes numeri 7 multiplices, in ferie extare comparebit fex alios, numeri ejus non multiplices, vel univerfaliter ita. Inter duos quofvis numeri *n* multiplices, in ferie numerorum imparium continuâ, ordine fe infequentium exftabunt $\overline{n-1}$ numeri, ipfius *n* non multiplices.

REGULA

DE PRIMIS NUMERIS INVENIENDIS,

SIVE

OPERATIO CRIBRI.

DISPONATUR feries numerorum imparium a numero ternario ad datum quemvis terminum *n* ordine fe infequentium.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25. 27. 29. 31. 33. 35. 37. 39. 41. 43. 45. 47. 49. 51. 53. 55. 57. 59. 61. 63. 65. 67. 69. 71. 73. 75. 77. 79. 81. 83. 85. 87. 89. 91. 93. 95. 97. 99. 101. 103. 105. 107. 109. 111. 113. 115. 117. 119. 121. 123. 125. 127. 129. 131. 133. 135. 137. 139. 141. 143. 145. 147. 149. 151. 153. 155. 157.

Numeri omnes in ferie a ternario per triadas recenfeantur, et eliminetur quivis tertius, quod erit omnes numeri ternarii multiplices a ferie amovere.

 Qui

Qui deinde numerum ternarium proxime ſubſequitur, et locum ſuum in ſerie etiamnum ſervat, numerus quinarius eſt. Eliminetur quinarii quadratus, et ab eo numeri omnes per pentadas recenſeantur ut eliminetur quivis quintus: quod erit omnes numeri quinarii multiplices amovere, qui prius hoc non paſſi ſunt, dum amoverentur numeri ternarii multiplices.

Eâdem quâ antea lege utitor. Qui in ſerie proxime poſt quinarium locum ſuum ſervat, ſeptenarius eſt. Eliminetur ſeptenarii quadratus, numeri poſt eum omnes per ἑπτάδας recenſeantur, et eliminetur quivis ſeptimus, quod erit amovere omnes numeri ſeptenarii multiplices, qui inter priores duas eliminationes non amoti antea erant.

Quoties opus erit, iteretur operatio, immutatis perpetuo, quæ juxta exempla ſupra adhibita immutanda ſunt, et repetantur eliminationes, uſque dum numerus e ſerie non ſublatus, proximus ab illo cujus multiplices poſtremum eliminati fuerint, iſtiuſmodi ſit, ut iſtius quadratus numerum ultimum et maximum in datâ ſerie exſuperet, et reſtabunt non amoti, qui in ſerie quâvis datâ ad terminum n, unice primi numeri ſunt, præter numerum binarium. Invenientur itaque primi numeri omnes in ſerie quâvis datâ &c. *Q. E. F.*

Cribrum igitur Eratoſthenis, Lector benevole, jam tibi, ut fruaris eo, in manus traditum eſt, non fictum aliquid aut adulterinum, ſed quale ab auctore ipſo olim illud concinnatum eſſe omnino exiſtimandum eſt. Quin et illud te monitum eſſe velim, inter veterum Mathematicorum inventa, vix in aliud quodvis te incidere poſſe, quod vel magis artificioſe, vel magis ad utilitatem, (in iis ſaltem quæ calculo indaganda ſunt) uſpiam excogitatum eſt.

DE NUMERIS

PRIMIS ET COMPOSITIS.

AUCTORE

SAMUELE EPISCOPO ASAPHENSI.

DE NUMERIS

PRIMIS ET COMPOSITIS.

DEFINITIONES.

I.

Si numerus, ſeipſum multiplicans, quadratum fecerit; et quadratum multiplicans cubum fecerit; et cubum multiplicans quadrato-quadratum; et quadrato-quadratum multiplicans quadrato-cubum; operatio, infinite progrediens, Multiplicatio dicitur Climactica.

II.

Numeri multiplicatione climacticâ facti Poteſtates dicuntur ejus, a quo opera multiplicationis initium ſumpſerit.

III.

Numerus autem ille poteſtatum Radix dicitur; et quadrati quidem quadratica; cubi cubica; quadrato-quadrati biquadratica; quadrato-cubi quadrato-cubica &c.

Cor. Numeri cujuſlibet poteſtates, multiplicatione climacticâ ordine procreatæ, ſeriem conſtituunt numerorum proportione convenientium, eâ ſcilicet ratione, quam unitas ad radicem habet.

Ex. gr. Ut unitas ad ternarium, ſic eſt ternarius ad quadratum ternarii; et quadratus ternarii ad cubum; et cubus ternarii ad quadrato-quadratum. Et infinita eſt progreſſio.

IV.

Numeri cujuſlibet poteſtates commodiſſime deſignantur numerorum notis radici ſuperne aſcriptis, qui locum uniuſcujuſque indicant, in ſerie inde ab unitate in infinitum prorogatâ; hoc modo:

$1.\ 2^{1}.$

$1.\ 2^1.\ 2^2.\ 2^3.\ 2^4.\ 2^5.$ &c.
$1.\ 5^1.\ 5^2.\ 5^3.\ 5^4.\ 5^5.$ &c.

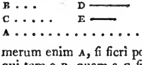
Numeri autem ſuperne aſcripti Indices vocantur.

Cor. In ſerie poteſtatum cujuſcunque numeri, proportione inter ſe conveniunt quorum Indices ſunt Arithmetici.

Ex. gr. In ſerie poteſtatum quinarii erit $5^2 : 5^5 = 5^{10} : 5^{13}$. Nempe cum numerorum 2, 5 et illorum 10, 13 eadem eſt differentia 3. Hoc autem facile intelligitur ex Cor. Def. 3ae hujus et 14. ſeptimi Elementorum. Hoc autem ceu fundamento, ut poſtea patebit, innititur tota ars Arithmeticês Logarithmorum.

PROP. I. THEOR.

Numerum, ex duobus primis mutuâ multiplicatione factum, nullus metitur alius præter primos illos, quorum mutuâ multiplicatione factus eſt.



Puta numerum A, e duobus primis B et C, mutuâ multiplicatione, factum. Manifeſtum eſt primos illos factum A utrumque metiri. Dico præter illos nullum. Numerum enim A, ſi fieri poteſt, metiatur alius quidam D, qui tam a B, quam a C ſit diverſus. Quoties autem D metitur A, tot ſint in E unitates. Numerus igitur A mutuâ numerorum D, E multiplicatione factus. Idem igitur factus ex duobus D, E, qui ex duobus B, C. Erit igitur B ad E ut D ad C[a].

[a] 19. ſeptimi.

Numerus B vel metitur, vel non metitur illum E. Metiatur primo. Numerus igitur D pariter metietur C[b]. Quod eſt abſurdum: cum C primus ſit[c].

[b] Def. 20. ſeptimi.

Sed B non metiatur E. Primus autem B[c]. Duo igitur B, E inter ſe primi[d]. Minimi igitur omnium, qui eandem cum illis rationem habent[e]. Minimi vero æqualiter metiuntur numeros, qui eandem cum illis rationem habent, antecedens antecedentem, conſequens conſequentem[f]. Quare E metietur C. Quod eſt abſurdum, cum C primus ſit[c]. Numerum igitur A nullus D metitur, ab utroque B et C diverſus. *Q. E. D.*

[c] ex hyp.
[d] 31. ſeptimi.
[e] 23. ſeptimi.
[f] 21. ſeptimi.

PROP.

PROP. II. THEOR.

Numeri cujuſvis primi poteſtates ſolus primorum metietur radix.

Numeri enim cujuſvis poteſtates ſeriem conſtituunt numerorum inde ab unitate proportione convenientium [a]. Cujuſvis igitur primi poteſtates ſoli metiuntur qui ſunt in ſerie poteſtatum [b]. Solus autem in ſerie poteſtatum primus, unitati proximus, ſeu radix. Numeri igitur cujuſvis primi poteſtates ſolus primorum metietur radix. *Q. E. D.*

[a] Cor. Def. 3. hujus.
[b] 13. noni.

PROP. III. THEOR.

Numerorum primorum poteſtates, ſive homologæ ſive diverſi nominis, numeri ſunt inter ſe primi.

Numerorum duorum primorum A et B exponantur poteſtatum ſeries 1, A, A^2, A^3, &c. 1, B, B^2, B^3, &c. Dico A^m, B^n numeros eſſe inter ſe primos. Non enim. Erit igitur iis menſura communis [c]. Eſto numerus D. Numerus igitur D metitur numerum A^m. Quoniam autem A primus eſt [d], et numerus A^m unus aliquis ex ſerie 1. A. A^2, A^3, &c.[d] idcirco numerum A^m ſoli metiuntur qui ſunt in eâdem ſerie, ipſo A^m minores [b]. Numerus igitur D erit aliquis in ſerie numerorum 1. A, A^2, &c. ipſo A^m minor. Omnes autem illius ſeriei numeros metitur A, ab unitate proximus. Numerus igitur A metietur D. Et cum numerum B^n metiatur D[d], numerus etiam A illum B^n metietur. Quod eſt abſurdum; cum numerus A primus ſit, et numerum B^n ſolus primorum metiatur B radix [e]. Numeris igitur A^m, B^n non eſt menſura communis. Sunt igitur inter ſe primi. Numerorum igitur primorum poteſtates, ſive homologæ ſive diverſi nominis, ſunt inter ſe primi.

1. A. A^2. A^3. A^4. A^5, A^m
1. B. B^2. B^3. B^4. B^5, B^n
D ——

Q. E. D.

[c] 14. Def. ſeptimi.
[d] ex hyp.
[e] 2. hujus.

PROP. IV. THEOR.

Numeri, a duobus quibuſlibet mutuâ multiplicatione facti, poteſtates factis ex poteſtatibus duorum homologis æquales ſunt.

Puta numerum C ex duobus A, B mutuâ multiplicatione

tione factum. Dico potestates numeri C factis ex potestatibus homologis numerorum A, B æquales esse. Nempe hoc volo; quadratum ex C facto ex quadratis ex A et B; cubum ex C facto ex cubis ipsorum A et B; quadrato-quadratum facto ex quadrato-quadratis; denique C^n facto ex A^n, B^n æqualem esse.

A . . .   B . . . . . .
C . . . .

Cum enim numerus A illum B multiplicando numerum C fecerit; erit I ad A ut B ad C [a]. Est autem B ad C ut quadratus ex B ad factum ex B et C [b], necnon ut factus ex B et C ad quadratum ex C [b]. Erit igitur et I ad A ut quadratus ex B ad factum ex B et C, necnon ut factus ex B et C ad quadratum ex C. Est etiam I ad A ut A ad quadratum ex A. Cum igitur sit I ad A ut quadratus ex B ad factum $B \times C$, et A ad quadratum ex A ut I ad A, hoc est, ut factus $B \times C$ ad quadratum ex C; ex æquo, erit I ad A^2 ut B^2 ad C^2. [c] Quadratus igitur ex C facto ex A^2, B^2 æqualis erit [a]. *Q. E. D.*

[a] Def. 15. et 20. septimi.
[b] 17. septimi.
[c] 14. septimi.

2. Cum I sit ad A^2 ut B^2 ad C^2, id enim ostensum, B^2 autem ad C^2 ut cubus ex B ad solidum $B \times C^2$ [b]; erit etiam I ad quadratum ex A ut cubus ex B ad solidum $B \times C^2$. Est autem quadratus ex A ad cubum ex A ut I ad A, hoc est, ut B ad C, sive ut solidus $B \times C^2$ ad cubum ex C. Cum igitur sit I ad quadratum ex A ut cubus ex B ad solidum $B \times C^2$ (id enim ostensum) et quadratus ex A ad cubum ex A ut solidus $B \times C^2$ ad cubum ex C; ex æquo, erit I ad cubum ex A ut cubus ex B ad cubum ex C. Quapropter cubus ex C facto ex cubis ipsorum A et B æqualis erit. *Q. E. D.*

3. Rursum $B^3 : C^3 = B^4 : C^3 \times B$. Sed $I : A^3 = B^3 : C^3$. id enim ostensum.

Quare $I : A^3 = B^4 : C^3 \times B$.

Sed $A^3 : A^4 = I : A = B : C = C^3 \times B : C^4$.

Ex æquo igitur $I : A^4 = B^4 : C^4$. Quare $C^4 = A^4 \times B^4$. *Q. E. D.*

Et simili modo pergendo ostendetur $C^n = A^n \times B^n$. Numeri igitur, a duobus quibuslibet mutuâ multiplicatione facti, potestates factis ex potestatibus duorum homologis æquales sunt. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. V. THEOR.

Numeri, a duobus quibuſlibet primis mutuâ multiplicatione facti, poteſtates ſoli metiuntur primi illi, et eorum poteſtates, et ex duobus illis primis, vel eorum poteſtatibus, facti.

Puta numerum C ex duobus primis A, B mutuâ multiplicatione factum. Numeri C poteſtas ſit C^n. Dico numerum C^n metiri nullum præter ipſos A, B, et ipſorum A, B poteſtates, et ex A, B vel poteſtatibus eorum factos.

A . . . B . . . . .
C . . . .
C^n 3375
D 5

Numerum C^n metiatur D. Numerus D aut primus erit, aut compoſitus. Et primum ſit primus numerus D. Numerus autem C^n numero ex A^n, B^n facto æqualis eſt [a]. Numerus igitur D, qui, primus cum ſit, factum ex illis A^n, B^n metitur, alterum ipſorum A^n, B^n metietur [b]. Sed numerum A^n ſolus primorum metitur A, numerum B^n ſolus primorum B [c]. Si igitur primus ſit D, alteri illorum A vel B æqualis erit.

[a] 4. hujus.
[b] 32. ſeptimi.
[c] 2. hujus.

Sed numerus D non ſit primus. Compoſitus igitur. Primus igitur aliquis eum metietur [d]. Metiatur primus [d] E, et metiendo faciat F. Ut ſit $D = E \times F$. Numerus F aut primus erit, aut compoſitus. Si compoſitus, metietur eum primus aliquis [d]. Metiatur primus G, et metiendo H faciat. Ut ſit $F = G \times H$, ac propterea $D = E \times G \times H$. Hoc modo pergendo, incidemus tandem in primum aliquem, qui præcedentem primo metietur. Et cum eo deventum fuerit, numeri compoſiti D in factores ſui primos omnes reſolutio perfecta erit. Eo jam deventum ſit, et perfecta ſit reſolutio numeri D in factores primos, E, G, K, L, ut ſit $D = E \times G \times K \times L$, cum illorum E, G, K, L unuſquiſque primus ſit. Numeri E, G, K, L, qui numerum D metiuntur, omnino metientur numerum C^n, quem ille D metitur.

A . . . B . . . . .
C . . . .
C^n 3375.
D 225.
E 5. F 45.
G 5. H 9.
K 3. L 3.

[d] 33. ſeptimi.

[a] 4. hujus. metitur. Sed C^n factus est ex duobus A^n, B^n.[a] Primorum igitur E, G, K, L, qui factum $A^n \times B^n$ metiuntur, alterum ex illis A^n, B^n unusquisque metietur[b]. Alteri igitur ipsorum A, B primorum E, G, K, L unusquisque æqualis erit. Nimirum cum illum A^n solus primorum metiatur A, illum B^n solus primorum B^c. Numerus igitur D, ex numeris E, G, K, L mutuâ multiplicatione factus, aut numeri A aut numeri B poteſtas erit, vel ex ipsis A, B, vel eorum poteſtatibus factus. Numeri igitur &c. *Q. E. D.*

A . . . B . . . . .
C . . . .
C^n 3375.
D 225.
E 5. F 45.
G 5. H 9.
K 3. L 3.

[b] 32. ſeptimi.
[c] 2. hujus.

Cor. Hinc patet, quâ ratione numeri cujusvis compositi in omnes factores seu divisores sui primos resolutio fiat.

PROP. VI. THEOR.

Numerum, ex primo quolibet et composito mutuâ multiplicatione factum, si quis alius metiatur; alius ille vel multiplex erit primi, vel pars compositi.

Numerum A, ex primo P et composito C mutuâ multiplicatione factum, numerus quidam alius D metiatur. Dico alium illum D vel primi P multiplicem esse, vel compositi C partem.

P . . . C . . . .
A 36.
D 18. E 2.

Quoties enim D metitur A, tot sint in E unitates. Numerus igitur A ex duobus D, E mutuâ multiplicatione factus[a]. Idem autem A ex duobus P, C mutuâ multiplicatione factus[b]. Erit igitur P ad D ut E ad C[c]. Numerus autem P illum D vel metitur, vel non metitur. Metiatur primum. Ita vero D multiplex erit illius P.

[a] 15. Def. ſeptimi.
[b] ex hyp.
[c] 19. ſeptimi.

Sed P non metiatur D. Duo igitur P, D inter se sunt primi[d]. Minimi igitur omnium qui eandem cum illis rationem habent[e].

[d] 31. ſeptimi.
[e] 23. ſeptimi.

Sed

Sed minimi æqualiter metiuntur numeros, qui eandem cum illis rationem habent, antecedens antecedentem, conſequens conſequentem [a]. Quare cum P ſit ad D ut E ad C, et P, D minimi ſint omnium in ſuâ ratione; D metietur C, et illius C pars erit. Numerus igitur D, qui metitur illum A, aut multiplex erit primi P aut pars compoſiti C.

P . . . C . . . .
A 36.
D 4. E 9.

[a] 21. ſeptimi.

Q. E. D.

PROP. VII. THEOR.

Numerum, ex primo quolibet et compoſito mutuâ multiplicatione factum, pars omnis compoſiti metietur multiplice quodam primi: et ſiquis multiplex primi eundem illum metiatur, metietur parte quâdam compoſiti.

Numerum A, ex primo P et compoſito C mutuâ multiplicatione factum, manifeſtum eſt numerum C metiri. Numeri C pars ſit numerus D. Et cum ille C metiatur A, fieri nequit quin D, qui metitur C, eundem A metiatur. Metiatur numero E. Numerus igitur A ex duobus D, E mutuâ multiplicatione factus [b]. Sed idem A ex duobus P, C mutuâ multiplicatione factus [c]. Erit igitur P ad E ut D ad C [d]. Sed D pars eſt numeri C [e]. Quare P numeri E eadem pars [e]. Et cum P pars ſit numeri E, multiplex erit E illius P. Simili modo oſtendemus partem quamlibet numeri C numerum A multiplice quodam numeri P metiri.

P . . . C . . . .
A 36.
D 4. E 9.

[b] 15. Def. ſeptimi.
[c] ex hyp.
[d] 19. ſeptimi.
[e] 20. Def. ſeptimi.

Jam vero D multiplex ſit numeri P et numerum A metiatur. Dico illum D metiri A parte quâdam compoſiti C. Metiatur enim D numerum A numero E. Numerus igitur A ex duobus D, E mutuâ multiplicatione factus [b]. Idem autem A ex duobus P, C mutuâ multiplicatione factus [c]. Quare, ut in caſu ſuperiori, P eſt ad D ut E ad C [d]. Et cum P pars ſit illius D, multiplicis nimirum ſui, erit E eadem pars illius C [e].

P . . . C . . . .
A 36.
D 18. E 2

Numerum igitur A, ex primo P et composito C mutuâ multiplicatione factum, pars omnis compositi C metietur multiplice quodam primi P. Et si quis primi P multiplex illum A metiatur, metietur parte quâdam compositi C. *Q. E. D.*

PROP. VIII. THEOR.

Numerum, ex primis quotcunque mutuâ multiplicatione factum, nullus primorum metietur præter eos, quorum multiplicatione factus est.

Ex primis quotcunque A, B, C, D puta numerum N mutuâ primorum multiplicatione factum, ut sit $N = A \times B \times C \times D$. Dico numerum N nullum primum metiri præter illos A, B, C, D. Numerum enim N, si fieri

A 7. B 11. C 13. D 19.
N 19019.
X. V. Y. Z.

potest, primus aliquis alius metiatur X. X autem metiatur N numero V. Numerus igitur N ex duobus X, V mutuâ multiplicatione factus[a]. Idem autem N ex numeris duobus A, et $B \times C \times D$ mutuâ multiplicatione factus[b]. Erit igitur A ad X ut V ad $B \times C \times D$[c]. Primi autem A, X omnino inter se sunt primi. Minimi igitur omnium in suâ ratione[d]. Quapropter numerus X metietur numerum $B \times C \times D$[e]. Metiatur numero Y. Numerus igitur $B \times C \times D$ ex duobus X, Y mutuâ multiplicatione factus[a]. Idem vero ex duobus B et $C \times D$ mutuâ multiplicatione factus[b]. Erit igitur B ad X ut Y ad $C \times D$[c]. Primi autem B, X omnino inter se sunt primi. Quare et minimi omnium in suâ ratione[d], et X metietur $C \times D$[e]. Metiatur numero Z. Numerus igitur $C \times D$ ex duobus X et Z mutuâ multiplicatione factus[a]. Idem vero $C \times D$ ex duobus C et D mutuâ multiplicatione factus. Erit igitur C ad X ut Z ad D[c]. Primi autem C, X omnino inter se sunt primi. Minimi igitur omnium in suâ ratione[d], et X metietur D[a]. Primus utique primum. Quod est absurdum. Numerum igitur N, ex primis, A, B, C, D mutuâ multiplicatione factum, nullus primorum metietur præter eos, quorum multiplicatione factus est. *Q. E. D.*

[a] 15. Def. septimi.
[b] ex hyp.
[c] 19. septimi.
[d] 23. septimi.
[e] 21. septimi.

PROP.

PROP. IX. THEOR.

Numerum, ex primis quotcunque mutuâ multiplicatione factum, non metitur eorum alicujus potestas ulla, quorum multiplicatione factus est, modo in illis nulli sint æquales.

Ex primis quotcunque A, B, C, D (quorum nulli sint inter se æquales) puta numerum N mutuâ illorum multiplicatione factum; ut sit N = A × B × C × D. Dico nullam potestatem alicujus eorum A, B, C, D metiri ipsum N. Nam, si fieri potest, quadratus eorum alicujus, puta A, metiatur illum N.

A 7. B 11. C 13. D 19.
N. 19019.

Jam cum numerus A, seipsum multiplicans, quadratum sui, A^2, fecerit, et numerum B × C × D multiplicans fecerit N [b]; erit A^2 ad N, ut A ad B × C × D [c]. Quare cum A^2 metiatur N, numerus A ipsum B × C × D pariter metietur. Quod est absurdum; cum factum ex primis B, C, D alius primus A non metiatur [d]. Quadratus igitur primi A numerum N, ex A, B, C, D factum, non metitur.

[b] ex hyp.
[c] 17. septimi.
[d] 8. hujus.

Dico neque cubum ipsius A. Nam si cubus, omnino quadratus; quoniam ipsum cubum quadratus metitur [e].

Dico neque supersolidum. Nam si supersolidus, omnino cubus. Quoniam ipsum supersolidum cubus metitur [e].

[e] Cor. 3. def. hujus.

Et, in infinitum progrediendo, ostendetur nullam potestatem primi A numerum N, ex primis A, B, C, D factum metiri. Similiter autem ostendetur neque aliûs cujusvis ex primis illis potestatem ullam metiri ipsum N. Numerum igitur, ex primis quotcunque mutuâ multiplicatione factum, non metitur eorum alicujus potestas ulla, quorum multiplicatione factus est, modo in illis nulli sint æquales. *Q. E. D.*

Cor. Si in primis A, B, C, D nonnulli sint æquales; puta primum duos, sed duos tantum, inveniri æquales; quadratus igitur ex duobus æqualibus factum ex omnibus metietur; sed potestas quadrato elatior nulla. Puta tres, sed tres tantum inveniri æquales. Cubus igitur ex tribus æqualibus factum ex omnibus metietur; sed potestas cubo elatior nulla. Puta quatuor, sed quatuor tantum in-

 veniri

veniri æquales. Superfolidus igitur ex quatuor æqualibus factum ex omnibus metietur; fed poteftas fuperfolido elatior nulla. Univerfe, fi in primis quotcunque A, B, C, D, E, F, G tot inveniantur æquales, quot funt in numero *n* unitates, poteftas æqualium cujus index *n* factum ex omnibus A × B × C × D × E × F × G metietur, fed poteftas illâ elatior nulla.

PROP. X. THEOR.

Numerum, ex primis quotcunque mutuâ multiplicatione factum, compofiti metientur foli, qui ex primis illis, binis, ternis, quaternis, quinis, omnibus denique mutuâ multiplicatione facti fuerint.

Putá numerum N ex primis quotcunque, A, B, C, D, E, mutuâ multiplicatione factum. Numerum N metiatur compofitus quidam X. Compofiti X in factores fui primos omnes *a*, *b*, *c*, *d*, *e* refolutio fiat[a]. Horum quifque, cum metiatur X, omnino metietur N, quem ille X metitur. Primi

A 7. B 11. C 13. D 19. E 29.
N 551551.
X ———
a. *b*. *c*. *d*. *e*.

[a] Cor. 5. hujus.

autem funt *a*, *b*, *c*, *d*, *e*. Et numerum N nullus primorum metitur præter ipfos A, B, C, D, E, ex quibus factus eft[b]. Primorum igitur *a*, *b*, *c*, *d*, *e* unufquifque uni alicui ex illis A, B, C, D, E æqualis erit. Univerfi autem numero non funt plures, quam funt illi A, B, C, D, E. Nam fi plures effent, cum nullus eorum uni alicui ex A, B, C, D, E non fit æqualis; omnino in pluribus *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. unus faltem aliquis eorum A, B, C, D, E plus femel reperiretur. Numerus igitur X, ex illis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* &c. mutuâ multiplicatione factus, factus effet ex poteftate quâdam plus femel reperti in reliquos ipforum A, B, C, D, E ductâ. Ita vero poteftas quædam alicujus primorum A, B, C, D, E metiretur numerum X, et X metiendo, metiretur quoque N. Quod fieri nequit; modo in primis A, B, C, D, E nulli fint æquales[c]. Sin vero æquales fint nonnulli, fi plures fint numero *a*, *b*, *c*, *d*, *e* quam funt illi A, B, C, D, E; vel fic etiam unus aliquis eorum A, B, C, D, E femel faltem pluries invenietur in illis *a*, *b*, *c*, *d*, *e* quam in ipfis A, B, C, D, E invenitur. Et numerus X ex illis omnibus *a*, *b*, *c*, *d*, *e* factus, fa-

ctus

[b] 8. hujus.

[c] 9. hujus.

ctus erit ex poteſtate quâdam ſemel ſaltem pluries reperti elatiore quam eſt illa, quæ indicem habet numerum, qui indicat quoties idem in ipſis A, B, C, D, E reperiatur. Ita vero poteſtas illa elatior alicujus primorum A, B, C, D, E metietur X; et X metiendo metietur quoque N. Quod fieri rurſum nequit[d]. Numeri igitur X diviſores omnes primi *a*, *b*, *c*, *d*, *e* numero non ſunt plures quam ſunt A, B, C, D, E. Sint igitur quot volueris, modo non plures quam A, B, C, D, E. Sint primum duo, puta *a*, *b*. Ut ſit $X = a \times b$. Duo *a*, *b* duobus quibuſdam ex illis A, B, C, D, E ſingulatim ſunt æquales. Numerus igitur X, ex duobus *a*, *b* factus, factus eſt ex duobus quibuſdam ipſorum A, B, C, D, E.

[d] Cor. 9. hujus.

Sint jam tres, puta *a*, *b*, *c*, numeri X diviſores primi. Ut ſit $X = a \times b \times c$. Tres *a*, *b*, *c* tribus quibuſdam ex illis A, B, C, D, E ſingulatim ſunt æquales. Numerus igitur X, ex tribus, *a*, *b*, *c* factus, factus eſt ex tribus quibuſdam ipſorum A, B, C, D, E.

Quod ſi quatuor ſint numeri X diviſores primi, ſimiliter oſtendemus numerum X factum eſſe ex quatuor ipſorum A, B, C, D, E. Denique ſi tot ſint numeri X diviſores primi, quot ſunt A, B, C, D, E, numerum X oſtendemus ex omnibus A, B, C, D, E factum, et ipſi numero N æqualem eſſe. Simili modo de alio quovis numero compoſito, numerum N metiente, idem oſtendemus; factum eſſe eum vel ex duobus quibuſdam, vel ex tribus, vel ex quatuor &c. primorum A, B, C, D, E. Numerum igitur ex primis quotcunque, mutuâ multiplicatione factum, compoſiti metientur ſoli, qui ex primis illis, binis, ternis, quaternis, quinis &c. omnibus denique mutuâ multiplicatione facti fuerint. *Q. E. D.*

PROP. XI. PROBL.

Dato numero compoſito numeros omnes invenire, qui eum metiuntur.

Reſolvatur datus numerus compoſitus in omnes ſui diviſores primos[a] "Horum ſingulos, binos, ternos, quaternos, quinos, &c. duc in ſe, et habebis etiam omnes diviſores compoſitos."

[a] Cor. 5. hujus.

Veritas hujus regulæ, a Newtono in Arithmeticâ Univerſali traditæ, ex propoſitione proxime antecedente ſatis eluceſcit. Sed cum in operâ multiplicationum tam mul-

multiplici, quibus numeri plures primi, gradatim omnibus modis, quibus fieri poteſt, pauciores pluresque aſſumendo, inter ſe componantur, errare vel exercitatiſſimo cuilibet proclive ſit; niſi quis ante oculos habeat certam aliquam et accurate compoſitam, quam ſequatur, operandi formam; idcirco illud in nos ſuſcepimus, ut viam commonſtremus facilem et expeditam, et erroris periculo quam maxime immunem.

Datum puta numerum A compoſitum. Inveniatur (tentando ſcilicet) minimus primorum, qui illum A metiuntur, P. Numerus P numerum A metiatur numero C. Aut primus erit C, aut compoſitus. Si primus; numeri P, C numerum A ſoli metiuntur[c].

A. 1186.	
P. 2.	C. 593.

[c] 1. hujus.

Sed compoſitus ſit C. Compoſitum C minimus primorum metiatur $\dot{P}$. Et $\dot{P}$ metiatur C numero $\dot{C}$. Si compoſitus ſit $\dot{C}$, eum minimus primorum metiatur $\ddot{P}$. Et $\ddot{P}$ metiatur $\dot{C}$ numero $\ddot{C}$. Hoc modo pergendo, incidemus tandem in numerum aliquem $\bar{C}$, quem primus aliquis primo metietur. Eo deventum ſit; et numerum $\bar{C}$ compoſitum primus Π primo Φ metiatur. Numeri igitur propoſiti A perfecta erit reſolutio in diviſores ſui primos.

A 4620	
P 2	C 2310
$\dot{P}$ 2	$\dot{C}$ 1155
$\ddot{P}$ 3	$\ddot{C}$ 385
$\dddot{P}$ 5	$\bar{C}$ 77
Π 7	Φ 11

Nimirum ut ſit $A = \Phi \times \Pi \times \dddot{P} \times \ddot{P} \times \dot{P} \times P$.

Hic priuſquam ulterius progrediamur, de diviſoribus mox inventis non inutile erit pauca quædam obſervaſſe; quæ operi inſtituto multum lucis offundent, quanquam ad demonſtrandam methodi noſtræ ἀκρίβειαν non ſint ſcitu omnino neceſſaria.

Primum igitur, cum numerus P diviſorum dati A minimus ſit; numerus C, quem minimus ille dividendo facit, maximus diviſorum erit. Simili ratione numerorum C, $\dot{C}$, $\ddot{C}$, $\bar{C}$ diviſores maximi erunt $\dot{C}$, $\ddot{C}$, $\bar{C}$, Φ, unuſquiſque proxime antecedentis.

2. Si

2. Si diviſores primi numeri dati A tot ſint numero, quot ſunt in numero n unitates; erit numerus A compoſitus ordinis illius, qui a numero n denominatus eſt. Nimirum ſi duo tantum diviſores primi ſint numeri A, erit numerus A planus, ſeu ſecundi ordinis. Si tres, ſolidus, ſeu tertii ordinis. Si quatuor, ſuperſolidus, ſeu quarti ordinis *; ſi quinque, ſuperſolidus ſecundus, ſeu quinti ordinis; ſi ſex, (ſicut numeri ejus, quem in exemplum poſuimus), ſuperſolidus tertius, ſeu ſexti ordinis.

3. Si vero A ſuperſolidus ſit tertius, erit C ſecundus. Et diviſorum numeri A in ordine ſuperſolidorum ſecundo, ſeu numerorum quinto, maximus. $\dot{C}$ autem ſuperſolidus erit, et diviſorum in ordine ſuperſolidorum primo, ſeu numerorum quarto, maximus. $\ddot{C}$ erit ſolidus, et diviſorum ſolidorum maximus. Univerſe, ſi numerus datus A ſit ordinis a numero n denominati, erit C ordinis, $n-1$; $\dot{C}$ ordinis, $n-2$; $\ddot{C}$ ordinis, $n-3$, &c. et numeri C, $\dot{C}$, $\ddot{C}$ &c. erunt diviſores numeri A in ordine quiſque ſuo maximi.

Hiſce animadverſis, progredimur in opere ſuſcepto.

Numero dato A in omnes diviſores ſui primos P, $\dot{P}$, $\ddot{P}$, $\dddot{P}$, Π, Φ reſoluto, inventis etiam maximis ejuſdem diviſoribus compoſitis C, $\dot{C}$, $\ddot{C}$, $\bar{C}$ in ſingulis numerorum compoſitorum ordinibus; conſtituatur abacus, in cellulas, ut videre eſt, diviſus lineis rectis tranſverſim et ad perpendiculum ductis. Ordinibus cellularum tranſverſis, ad oras abaci exteriores, a ſummo ad imum pergendo, apponantur notæ numerales I, II, III, IV, V, VI.

* *Numerum, duorum mutuâ multiplicatione factum, planum vocari Euclides juſſit. Ex tribus autem mutuâ multiplicatione factum, ſolidum nuncupavit. Numeros ex quatuor mutuâ multiplicatione factos junioribus receptum eſt ſuperſolidos vocari, vel, barbarâ Algebraizantium loquelâ, ſurſolidos. Ex quinque factos, nos ſuperſolidos ſecundos vocamus; ex ſex, tertios. Et ſic deinceps. Vel primos ponentes in ordine numerorum primo, planos ponimus in ſecundo, ſolidos in tertio, ſuperſolidos in quarto, ſuperſolidos ſecundos in quinto, tertios in ſexto numerorum ordine, ſimiliter ſine fine progredientes.*

eum fcilicet in finem, ut, exitu operis, divifores primi, plani, folidi, fuperfolidi, ordine quique fuo collocati, ipfo abaci intuitu, alii ab aliis dignofcantur. Tum in cellulis fummi ordinis tranfverfi feu I[1]. infcribantur numeri dati divifores primi Φ, Π, P⃛, P̈, Ṗ, P, ordine inverfo, a maximo Φ primum ufque minimumque P. Maximum primorum Φ (11) proximus illi Π (7) multiplicet. Multiplicando, planum c̄ (77) faciet. Qui in primam cellulam tranfverfi ordinis II[1]. infcribatur. Planum c̄ tertius primorum in ordine I. P⃛ (5) multiplicet. Multiplicando, folidum c̈ (385) faciet, qui in primam cellulam tranfverfi ordinis III infcribatur. Jam vero idem primorum tertius P⃛ (5) duos, eum antecedentes, multiplicet. Multiplicando, planos faciet (55, 35) qui in cellulas ordinis fecundi poft c̄ infcribantur.

I.	11	7	5	3	2	2								
II.	77	55	35	33	21	15	22	14	10	6	4			
III.	385	231	165	105	154	110	70	66	42	30	44	28	20	12
IV.	1155	770	462	330	210	308	220	140	132	84	60			
V.	2310	1540	924	660	420									
VI.	4620													

A 4620
P 2 c 2310
Ṗ 2 ċ 1155
P̈ 3 c̈ 385
P⃛ 5 c̄ 77
Π 7 Φ 11

Jam quartus primorum in ordine cellularum I, P̈ (3) folidum c̈ (385) multiplicet. Multiplicando, fuperfolidum ċ faciet (1155) qui in cellulam primam ordinis IV[1]. infcribatur. Idem vero primorum quartus P̈ (3) tres planos ordinis II[1] (77, 55, 35) multiplicet. Multiplicando, tres folidos faciet (231, 165, 105) in tres cellulas ordinis III[1] poft folidum c̈ (385) infcribendos. Rurfum idem primorum quartus P̈ tres, eum ante-

antecedentes (11, 7, 5), multiplicet. Multiplicando, tres planos faciet (33, 21, 15) in totidem cellulas ordinis II. inſcribendos.

Jam quintus primorum in ordine cellularum I. $\dot{p}$ (2) ſuperſolidum $\dot{c}$ (1155) multiplicet. Multiplicando, ſuperſolidum ſecundum c faciet (2310), qui in cellulam primam ordinis V[1]. inſcribatur. Idem vero primorum quintus $\dot{p}$ quatuor ſolidos, qui in III° ſunt cellularum ordine (385, 231, 165, 105), multiplicet. Multiplicando, quatuor ſuperſolidos faciet (770, 462, 330, 210) in totidem cellulas ordinis IV poſt ipſum $\dot{c}$ (1155) inſcribendos. Rurſum idem primorum quintus $\dot{p}$ (2) ſex planos, qui in ſecundo ſunt cellularum ordine (77, 55, 35, 33, 21, 15) multiplicet. Multiplicando, ſex ſolidos faciet (154, 110, 70, 66, 42, 30) in cellulas ordinis tertii inſcribendos. Rurſum idem primorum quintus, $\dot{p}$, (2) quatuor, eum antecedentes (11, 7, 5, 3), multiplicet. Multiplicando, quatuor planos faciet (22, 14, 10, 6) in cellulas ordinis II. inſcribendos.

Poſtremum (ſcilicet in numeri propoſiti exemplo) ſextus primorum in ordine cellularum I. P, (2) ſuperſolidum ſecundum c (2310) multiplicet. Multiplicando, ſuperſolidum tertium faciet ipſum ſcilicet A numerum propoſitum (4620). Qui in cellulam primam ordinis VI. inſcribatur. Idem vero primorum ſextus P (2) quinque ſuperſolidos qui ſunt in ordine cellularum IV. (1155, 770, 462, 330, 210) multiplicet. Multiplicando, quinque ſuperſolidos ſecundos faciet (2310, 1540, 924, 660, 420). Horum quidem primus, 2310, negligendus eſt; cum ex antecedente multiplicatione jamjam in abaco comparuit. Quatuor novi (1540, 924, 660, 420) in totidem cellulas ordinis V. inſcribendi. Rurſum idem primorum ſextus P (2) decem ſolidos qui ſunt in ordine cellularum III. (385, 231, 165, 105, 154, 110, 70, 66, 42, 30) multiplicet. Multiplicando, decem ſuperſolidos faciet (770, 462, 330, 210, 308, 220, 140, 132, 84, 60). Horum quatuor primi (770, 462, 330, 210) negligendi; cum ex prioribus multiplicationibus in abaco jamjam comparuerunt. (Idque in hoc negotio ſemper obſervandum, ut omittantur numeri iteratâ vice

H 4 prode-

prodeuntes). Sex novi (308, 220, 140, 132, 84, 60) in cellulas totidem IV. ordinis inscribendi. Rursum idem primorum sextus P, (2) planos decem qui sunt in ordine cellularum II. (77, 55, 35, 33, 21, 15, 22, 14, 10, 6) multiplicet. Multiplicando, decem solidos faciet (154, 110, 70, 66, 42, 30, 44, 28, 20, 12). Horum rursum sex primi (154, 110, 70, 66, 42, 30) negligendi, utpote qui jam ante in abaco comparuerunt. Quatuor novi (44, 28, 20, 12) in cellulas totidem III. ordinis inscribendi. Denique idem primorum sextus P (2) quinque eum antecedentes (11, 7, 5, 3, 2) multiplicet. Multiplicando, quinque planos faciet (22, 14, 10, 6, 4) faciet; quorum omnes præter ultimum (4) negligendi, utpote qui ante comparuerunt. Ultimus ille (4) in cellam ordinis II. inscribendus.

Ita divisores omnes numeri dati A abacus confectus promet; et seorsim quidem primos, seorsim planos, seu ex binis primis factos; seorsim solidos, seu ex trinis; seorsim item ex quaternis, quinis, et quotquot, pro primorum numero, multiplicando componi poterunt.

Numeri autem propositi Divisores omnes, annumeratâ ipsis unitate, numero sunt Quadraginta Octo: viz.

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 10. 11. 12. 14. 15. 20. 21. 22. 28. 30. 33. 35. 42. 44. 55. 60. 66. 70. 77. 84. 105. 110. 132. 140. 154. 165. 210. 220. 231. 308. 330. 385. 420. 462. 660. 770. 924. 1155. 1540. 2310. 4620.

Horum autem sunt Primi Sex 1, 2, 3, 5, 7, 11; Plani Undecem 4, 6, 10, 14, 15, 21, 22, 33, 35, 55, 77; Solidi Quatuordecem 12, 20, 28, 30, 42, 44, 66, 70, 105, 110, 154, 165, 231, 385; Supersolidi Undecem 60, 84, 132, 140, 210, 220, 308, 330, 462, 770, 1155; Supersolidi secundi Quinque 420, 660, 924, 1540, 2310; Supersolidus tertius Unus 4620.

Cæterum (ut id obiter moneamus) numeri ex multiplicationibus iteratâ vice prodibunt, quoties inter divisores primos duo pluresve æquales fuerint.

Illud etiam notandum, omnis numeri divisores numero pari esse (nisi forte numerus quadratus sit). Unde commodissime in binis ordinibus disponantur, eo modo ut quonam quisque datum dividat, ipso intuitu, manifestum fiat; in hunc modum.

Divi-

Divisores numeri 4620.

1	2	3	4	5	6	7	10	11	12	14	15	20	21	22	28	30	33	35	42	44	55	60	66
4620	2310	1540	1155	924	770	660	462	420	385	330	308	231	220	210	165	154	140	132	110	105	84	77	70

Soli autem numeri quadrati impari numero divisorum gaudent: cum quadratus quisque divisores radice quadraticâ majores totidem numero ac minores habeat, et radix quadratica seipsâ quadratum dividat. Unde et hujusmodi numerorum divisores in binos correlatorum ordines facile redigendi sunt.

Exemplo sint Divisores numeri quadrati 144.

1	2	3	4	6	8	9	12
144	72	48	36	24	18	16	12

Porro in quantitatibus Algebraicis, modo tales sint quæ simplices divisores capiant, viget eadem regula, eademque operandi ratio. Quod ex exemplis, quæ subjicimus, quivis intelliget.

EX.

I.	c	$\dot{b}$	$\dot{a}$	$\dot{7}$	$\dot{3}$	$\dot{2}$															I.
II.	bc	ac	ab	$7c$	$7b$	$7a$	$3c$	$3b$	$3a$	21	$2c$	$2b$	$2a$	14	6						II.
III.	abc	$7bc$	$7ac$	$7ab$	$3bc$	$3ac$	$3ab$	$21c$	$21b$	$21a$	$2bc$	$2ac$	$2ab$	$14c$	$14b$	$14a$	$6c$	$6b$	$6a$	42	III.
IV.	$7abc$	$3abc$	$21bc$	$21ac$	$21ab$	$2abc$	$14bc$	$14ac$	$14ab$	$6bc$	$6ac$	$6ab$	$42c$	$42b$	$42a$						IV.
V.	$21abc$	$14abc$	$6abc$	$42bc$	$42ac$	$42ab$															V.
VI.	$42abc$																				VI.

EX. I.

Propofita fit quantitas Algebraica $42abc$, cujus inveniendi fint Divifores.

$$42abc$$

P 2	C $21abc$
$\dot{\text{P}}$ 3	$\dot{\text{C}}$ $7abc$
$\ddot{\text{P}}$ 7	$\ddot{\text{C}}$ abc
$\dddot{\text{P}}$ a	$\dddot{\text{C}}$ bc
Π b	Φ c

EX. II.

Propofita fit quantitas Algebraica, cujus inveniendi fint Divifores,

$$2abb-6aac.$$

P 2	C $abb-3aac$
Π a	Φ $bb-3ac$

I.	$bb-3ac$	a	2	I.
II.	$abb-3aac$	$2bb-6ac$	$2a$	II.
III.	$2abb-6aac$			III.

SCHOLION.

SCHOLION.

Hujus Problematis (ne, dum majora tractamus, parva etiam et ad quotidianos usus pertinentia obiter attingere dedignemur) hujusce, igitur inquam, Problematis non omnino contemnendus est usus, quem in quæstionibus de Usuris, aliis computisque nummariis, sufficere invenietur; præcipue in tabulis "*Partium Aliquot*," quæ vocantur, condendis: quarum ope magnarum pecuniarum usuræ pro temporibus exiguis æstimandæ sint, et in rerum venalium commerciis facili compendio rationes ineundæ (aliter satis intractabiles) juxta quas venditor et emptor in mercibus præbendis et pretiis persolvendis, alter cum altero, decidere poterint.

Nimirum integri cujusvis fractionem, a numero quovis denominatam qui numerum minimarum specierum in Integro, seu specie maxima, metitur, cum numerator fractionis sit unitas; eam, inquam, fractionem "*Partem Aliquot*" Integri negotiatores vocant. Ex gr. apud nos libra nummaria (1l *sterling*) est Integrum, seu species (vel denominatio) potius maxima pecuniæ numeratæ; cujus species minima est semiobolus (*a farthing*). Libra autem tota semiobolos habet 960. Tres igitur solidi argentei (*shillings*) cum quatuor denariis (3*s* 4*d*) sunt Pars Aliquot unius libræ, scilicet $\frac{1}{6}$. Nam cum singuli solidi 12 habet denarios, et denarii singuli quatuor semiobolos, ac proinde solidi singuli 48 semiobolos; omnino tres solidi habent 144 semiobolos, et 4 denarii habent 16 semiobolos. Tres igitur solidi cum quatuor denariis semiobolos habent $144+16$, seu 160. Numerus autem 160 numerum 960 metitur numero 6. Est igitur 3*s* 4*d* pars sexta libræ. Rursum septem denarii cum duobus semiobolis ($7\frac{1}{2}d$) sunt pars aliquot unius libræ, sc. $\frac{1}{32}$. Septem enim denarii habent 28 semiobolos. Septem igitur denarii cum duobus semiobolis, semioboli sunt 30. Numerus autem 30 metitur numerum 960 numero 32. Quapropter $7\frac{1}{2}d$ est pars $\frac{1}{32}$ unius libræ.

In pleniorem rei illustrationem tabulam, ut infra, exhibemus partium aliquot libræ nummariæ; et ostendimus hunc in finem quomodo conficiatur. Inveniendi sunt primum divisores numeri 960.

960

960

P 2	C 480
$\dot{P}$ 2	$\dot{C}$ 240
$\ddot{P}$ 2	$\ddot{C}$ 120
$\dddot{P}$ 2	$\dddot{C}$ 60
$\ddddot{P}$ 2	$\ddddot{C}$ 30
$\overset{.....}{P}$ 2	$\overset{.....}{C}$ 15
Π 3	Φ 5

I.	5	3	2	2	2	2	2	2
II.	15	10	6	4				
III.	30	20	12	8				
IV.	60	40	24	16				
V.	120	80	48	32				
VI.	240	160	96	64				
VII.	480	320	192					
VIII.	960							

Numeri igitur 960 diviſores ſunt hi:

1	2	3	4	5	6	8	10	12	15	16	20	24	30
960	480	320	240	192	160	120	96	80	64	60	48	40	32

numero univerſi 28, et totidem erunt Partes Aliquot unius libræ, quas tabula ſubjecta exhibet.

Partes

Partes Aliquot Libræ.

Div.	Semiob.	Den.	Solidi.	L.	S.	D.	Pars aliquot.
1	960	240	20	1	0	0	$\frac{1}{1}$
2	480	120	10	0	10	0	$\frac{1}{2}$
3	320	80		0	6	8	$\frac{1}{3}$
4	240	60		0	5	0	$\frac{1}{4}$
5	192	48		0	4	0	$\frac{1}{5}$
6	160	40		0	3	4	$\frac{1}{6}$
8	120	30		0	2	6	$\frac{1}{8}$
10	96	24		0	2	0	$\frac{1}{10}$
12	80	20		0	1	8	$\frac{1}{12}$
15	64	16		0	1	4	$\frac{1}{15}$
16	60	15		0	1	3	$\frac{1}{16}$
20	48	12		0	1	0	$\frac{1}{20}$
24	40	10		0	0	10	$\frac{1}{24}$
30	32	8		0	0	8	$\frac{1}{30}$
32	30	$7\frac{1}{2}$		0	0	$7\frac{1}{2}$	$\frac{1}{32}$
40	24	6		0	0	6	$\frac{1}{40}$
48	20	5		0	0	5	$\frac{1}{48}$
60	16	4		0	0	4	$\frac{1}{60}$
64	15	$3\frac{3}{4}$		0	0	$3\frac{3}{4}$	$\frac{1}{64}$
80	12	3		0	0	3	$\frac{1}{80}$
96	10	$2\frac{1}{2}$		0	0	$2\frac{1}{2}$	$\frac{1}{96}$
120	8	2		0	0	2	$\frac{1}{120}$
160	6	$1\frac{1}{2}$		0	0	$1\frac{1}{2}$	$\frac{1}{160}$
192	5	$1\frac{1}{4}$		0	0	$1\frac{1}{4}$	$\frac{1}{192}$
240	4	1		0	0	1	$\frac{1}{240}$
320	3	$0\frac{3}{4}$		0	0	$0\frac{3}{4}$	$\frac{1}{320}$
480	2	$0\frac{1}{2}$		0	0	$0\frac{1}{2}$	$\frac{1}{480}$
960	1	$0\frac{1}{4}$		0	0	$0\frac{1}{4}$	$\frac{1}{960}$

Simili modo Partes Aliquot Libræ Ponderalis inveniantur; quinetiam ejus quicquid fit quod in quolibet rerum genere, quas vitæ civilis commercia dividi et multiplicari postulant, integrum et unum haberi homines voluerunt.

JOANNIS KEILLII

GEOMETRIÆ OLIM IN ACADEMIA OXONIENSI PROFESSORIS SAVILIENSIS

DE NATURA ET ARITHMETICA LOGARITHMORUM

TRACTATUS BREVIS.

NOTAS SUAS

De verâ conftitutione Syftematis Briggiani, De Arithmeticâ Fractionum Logarithmicâ, Deque Anatocifmo, Appendicem etiam de Problemate quodam Sphærico

ADJECIT

SAMUEL EPISCOPUS ASAPHENSIS.

DE

NATURA ET ARITHMETICA

LOGARITHMORUM

PRÆFATIO AUCTORIS.

INGENS olim compendium accepit Mathesis, primo characterum Indicorum, deinde Fractionum decimalium introductione *; non minus tamen adjumenti ex Logarithmis, quam ex utroque invento, ei accessit: quorum quidem usum, per omnes disciplinas mathematicas latissime patentem, quis iis studiis vel leviter imbutus ignorat? Horum ope numeri fere immensi et aliâs plane intractabiles, sine ullo tædio, in ordinem coguntur: præsentissimum horum auxilium ubique conspicitur, sive cursum navis dirigat Nauta, sive curvarum altiorum indolem investiget Geometra, sive stellarum loca exquirat Astronomus, sive alia naturæ phænomena explicet Physicus, sive demum pecuniæ ex usuris incrementum computet Nummatus.

Argumento, in quo versatur hic libellus, illustrando non defuerunt viri in re Mathematicâ primarii. Sed eorum alii omnem illius ambitum complexi, doctissime illi quidem, sed magistris solum scripserunt: alii ad Tyronum captum se accommodantes, certas quasdam, easque magis obvias, Logarithmorum proprietates sele-

* Quando primum ab Oriente, ubi ortam fuisse credibile est, in nostram Europam advecta fuit Decimalis Fractionum Logistica, incertum est. Mihi haud levis est suspicio, doctissimo Pontifici Gerberto, qui, exeunte sæculo decimo, cognomine Sylvestri Secundi, Romæ sedebat, non ignotam fuisse.

gerunt, intimam eorum naturam non aperuerunt. Quod igitur adhuc desiderari videbatur, mihi in animo erat supplere hoc tractatu; qui in id præcipue collimat, ut Logarithmorum scientia iis, qui ultra Arithmeticæ speciosæ et Geometriæ elementa non processerunt, penitus aliquando pateat.

Mirabile Logarithmorum inventum *Nepero Scoto Merchestonii Baroni* debetur, qui primus canonem Logarithmorum descripsit, construxit, et edidit, *Edinburgi anno* 1614. Hunc statim omnes Mathematici, ejus utilitatem suspicientes, grati arripuerunt. Et cum de aliis fere omnibus præclaris inventis plures contendunt Gentes, omnes tamen *Neperum* Logarithmorum authorem agnoscunt, qui tanti inventi gloria solus sine æmulo fruitur.

Aliam deinde magis commodam Logarithmorum formam *Neperus* excogitavit, et communicato consilio cum Domino *Henrico Briggio*, Geometriæ in Academia *Oxoniensi* Professore, hunc socium operis sibi adjunxit, ut Logarithmos in meliorem formam reductos compleret. Sed *Nepero* demortuo, totum quod restabat onus in *Briggium* devolutum est; qui magno labore, et summâ quâ pollebat ingenii subtilitate, canonem Logarithmicum secundum novam illam formam composuit, pro viginti primis numerorum chiliadibus (seu ab 1 usque ad 20000) aliisque undecim ab 90000 usque ad 101000, pro quibus omnibus numeris supputavit Logarithmos, quatuordecim figurarum locis constantes. Hic canon editus est *Londini* anno 1624.

Eundem canonem iterato edidit *Goudæ* apud *Batavos* anno 1628 *Adrianus Vlacq*, suppletis, ut docuerat *Briggius*, chiliadibus intermediis prius omissis; sed brevioribus usus est Logarithmis, utpote qui ad decem tantum figurarum loca continuantur.

Computavit etiam *Briggius* Logarithmos sinuum et tangentium pro singulis Gradibus graduumque centesimis ad 15 figurarum loca, quibus adjunxit sinus, tangentes et secantes veros, seu naturales, quos prius ad totidem loca supputaverat. Logarithmi sinuum et tangentium dicuntur sinus et tangentes artificiales: ipsi vero sinus et tangentes naturales vocantur. Has tabulas simul cum tractatu de tabularum constructione et usu, post mortem *Briggii*, sub nomine *Trigonometriæ Britan-*

Britannicæ edidit *Henricus Gelibrand Londini* anno 1633.

Poſt illud tempus, pluribus in locis tabularum compendia prodiere; in quibus ſinus, tangentes, eorumque Logarithmi, tantum conſtant ſeptem notarum locis, et numerorum Logarithmi exhibentur tantum pro numeris ab 1 uſque ad 10000; qui pro pleriſque caſibus ſufficere poſſunt.

Harum tabularum diſpoſitio ea mihi videtur optima, quam primus excogitavit *Nathaniel Roe Anglus Suffolcienſis*, quamque, quibuſdam in melius mutatis, ſequitur *Sherwinus* * in tabulis ſuis Mathematicis *Londini* anno 1705 editis, in quibus habentur Logarithmi numerorum omnium ab unitate uſque ad 101000, ſeptem figurarum notis conſtantes, Logarithmorum quoque differentiæ parteſque proportionales adſcribuntur,

* In *Tabulis Logarithmicis Nathanielis Roe*, anno 1633 *Londini* editis, Numeri in πεντηκοντάδας diviſi ſunt, quæ in lineâ tranſverſâ ſummæ paginæ ordine ſcriptæ ſunt; minoribus numeris, ab unitate quadraginta uſque novem, oram paginæ ſiniſtram occupantibus. Logarithmorum autem ea fuit diſtributio, quâ primæ quatuor cujuſque figuræ ſeorſim in ſummâ paginâ ſiſterentur; quatuor poſteriores ſub propriâ cujuſque πεντηκοντάδι, ad latus autem figurarum quas ſupra πεντηκοντάδας numerus haberet.

Poſt biennium fere *Londini* in lucem prodiere *Edmundi Wingate* Tabulæ, in quibus primum, ut opinor, adhibita eſt commodiſſima illa, quâ nunc utimur, numerorum diſtributio, ut monades cujuſque in ſummâ paginâ tranſverſim ſcribantur, decades, centuriæ &c. in orâ ſiniſtrâ.

Anno autem 1658 *Joannes Newtonus*, in Trigonometriâ ſuâ Britannicâ *Londini* editâ, diſtributionem Logarithmorum *Roæi*, cum ordinatione numerorum *Wingatti* conjungens, optimam eam Tabularum formam protulit, quam *Sherwinus* ſecutus eſt, et poſt *Sherwinum* omnes. Qui plura de variis Tabularum formis velit, conſulat peritiſſimum doctiſſimumque Geometram *Carolum Huttonum*; qui in Hiſtoriâ Logarithmorum, Tabulis ſuis præfixâ, totam hanc materiam erudite admodum pertractavit. *Huttoni* autem Tabulæ, anno 1801 tertiâ vice editæ, *Sherwinianis*, ut id obiter moneamus, ſunt ſimillimæ, ita tamen ut multa in melius mutata ſint, multa etiam addita haud contemnendæ utilitatis; quæ apud ſcriptores alios, ſive noſtrates, ſive exteros, fruſtra quæſiveris.

quarum ope Logarithmi numerorum usque ad 10000000 facile haberi possunt; quatenus scil. hi Logarithmi septem tantum figurarum notis exprimantur. Præterea in iisdem prostant sinus, tangentes et secantes, cum eorum Logarithmis et differentiis, pro quolibet gradu et minuto Quadrantis, cum aliis quibusdam tabulis Mathesi Practicæ inservientibus.

CAPUT

CAPUT I.

De ortu et natura Logarithmorum.

QUEMADMODUM in Geometriâ, linearum magnitudines numeris ſæpe definiuntur; ita quoque in Arithmeticâ viciſſim expedit, ut numeri aliquando per lineas exponantur, aſſumendo ſcil. lineam aliquam, quæ ipſam unitatem repræſentet, ejus dupla numerum binarium, tripla ternarium, dimidia fractionem $\frac{1}{2}$, et ita deinceps, exponet. Hâc ratione quorundam numerorum Geneſis et proprietates melius concipiuntur, clariuſque in animo verſantur, quam per abſtractos numeros fieri poſſit.

Hinc ſi quælibet linea a in ſeipſam ducatur, (*Fig.* 1.) quæ exinde prodit quantitas a^2, non æſtimanda eſt tanquam duarum dimenſionum, ſive ut Quadratum Geometricum, cujus latus eſt linea a; ſed tanquam linea, quæ ſit tertia proportionalis lineæ, pro unitate aſſumptæ, et lineæ a. Sic etiam ſi a^2 per a multiplicetur, quæ prodit a^3, non erit trium dimenſionum quantitas, ſeu Cubus Geometricus; ſed linea quæ eſt quartus terminus in progreſſione Geometricâ, cujus primus terminus eſt 1, ſecundus a. Nam termini 1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, a^6, a^7, &c. ſunt in continuâ ratione 1 ad a: et indices terminis affixi oſtendunt locum, ſeu diſtantiam quam quiſque terminus ab unitate obtinet. v. gr. a^5 eſt in quinto loco ab unitate, a^6 in ſexto, ſeu ſexies magis diſtans ab unitate quam a ſeu a^1, qui immediate ſequitur unitatem.

Si inter terminos 1 et a inſeratur medius proportionalis, qui eſt $\sqrt{a}$, ejus index erit $\frac{1}{2}$; nam ejus diſtantia ab unitate erit ſemiſſis diſtantiæ a ab unitate, adeoque pro $\sqrt{a}$ ſcribi poteſt $a^{\frac{1}{2}}$. Et ſi inter a et a^2 inſeratur medius proportionalis, ejus index erit $1\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{3}{2}$; nam ejus diſtantia erit ſeſquialtera diſtantiæ ipſius a ab unitate.

Si inter 1 et a inſerantur duo medii proportionales; horum primus eſt radix cubica ipſius a, cujus index debet eſſe $\frac{1}{3}$. Nam terminus ille diſtat ab unitate tertiâ tantum parte diſtantiæ ipſius a, adeoque radix cubica

fcribi debet per $a^{\frac{1}{1}}$. Hinc Index ipfius Unitatis eft o, nam unitas non diftat a feipfâ*.

Eadem feries quantitatum Geometrice proportionalium continuari poteft utrinque, tam defcendendo verfus finiftram, quam afcendendo verfus dextram; termini enim $\frac{1}{a^5}\ \frac{1}{a^4}\ \frac{1}{a^3}\ \frac{1}{a^2}\ \frac{1}{a}\ 1\ a\ a^2\ a^3\ a^4\ a^5$ &c. funt omnes in eâdem progreffione Geometricâ. Adeoque cum diftantia ipfius a ab unitate fit verfus dextram et pofitiva, feu $+ 1$; diftantia æqualis in contrariam partem, fcil. diftantia termini $\frac{1}{a}$, erit negativa, feu $- 1$; qui erit index termini $\frac{1}{a}$, pro quo itaque fcribi poteft a^{-1}. Similiter in termino a^{-2}, index $- 2$ oftendit terminum in fecundo loco ab unitate verfus finiftram locari, idemque valet terminus a^{-2} ac $\frac{1}{a^2}$. Item a^{-3} eft idem ac $\frac{1}{a^3}$. Indices enim hi negativi oftendunt terminos, ad quos pertinent, in partem difcedere contrariam ei, quâ ab unitate progrediuntur termini, quorum indices funt pofitivi. Hifce præmiffis:

Si fuper lineâ A N utrinque indefinite extenfâ, (*Fig.* 2.) capiantur A C, C E, E G, G I, I L dextrorfum: item A Γ, ΓΠ, &c. finiftrorfum, omnes inter fe æquales: et ad puncta Π, Γ, A, C, E, G, I, L erigantur fuper A N perpendiculares rectæ Π Σ, Γ Δ, A B, C D, E F, G H, I K, L M, quæ fint omnes continue proportionales, numerofque repræfentent, quorum A B fit unitas: lineæ A C, A E, A G, A I, A L, — A Γ, — A Π diftantias numerorum ab unitate refpective exponent; five locum et ordinem, quem quifque numerus in ferie Geometrice proportionalium obtinet, prout ab unitate diftat. Ita A G cum fit tripla rectæ A C, erit numerus G H in tertio ab unitate loco, fi modo C D

* Huc ufque cum tranflatione quâdam ufurpata eft vox *diftantia*, neque locorum intervallo, fed numero magnitudinum, in perpetuâ analogiâ certæ cujufdam rationis unitati et alii alicui in ferie Geometricâ intercedentium, æftimanda eft. Hujufmodi autem diftantiæ ad diftantias veras et locales, ope curvæ cujufdam, mox revocandæ funt.

fit

ſit in primo: ſic L M erit in quinto loco, cum ſit A L = 5 A C.

Quod ſi proportionalium extremitates ΣΔ, B D, F H, K M rectis lineis jungantur; figura Σ Π L M ſit polygonum, pluribus aut paucioribus conſtans lateribus, prout plures aut pauciores in progreſſione fuerint termini.

Si partes A C, C E, E G, G I, I L biſecentur in punctis *c*, *e*, *g*, *i*, *l*, et rurſus excitentur perpendiculares *cd*, *ef*, *gh*, *ik*, *lm*, quæ ſint mediæ proportionales inter A B, C D; C D, E F; E F, G H; G H, I K; I K, L M; nova orietur proportionalium ſeries, cujus termini, incipiendo ab eo qui proxime ſequitur unitatem, duplo plures ſunt, quam in primâ ſerie; et terminorum differentiæ minores fiunt, propiuſque ad rationem æqualitatis accedunt termini, quam prius: quinetiam in hâc novâ ſerie, rectæ A L, A *c* diſtantias terminorum L M, *cd* ab unitate exponent; ſcil. cum A L decies major ſit quam A *c*, erit L M decimus ſeriei terminus ab unitate; et ob A *e* triplo majorem quam A *c*, erit *ef* tertius ſeriei terminus, modo *cd* ſit primus: et inter A B et *ef* erunt duo medii proportionales, inter A B vero et L M erunt novem termini medii proportionales.

Quod ſi linearum extremitates B, *d*, D, *f*, F, *h*, H &c. rectis jungantur, fiet novum polygonum, pluribus quidem, at brevioribus conſtans lateribus.

Si rurſus diſtantiæ A *c*, *c* C, C *e*, *e* E &c. biſecari concipiantur, et inter binos quoſque terminos, ad medias illas diſtantias inſeri intelligantur medii proportionales, alia nova orietur proportionalium ſeries, terminos ab unitate duplo plures continens quam prior; terminorum vero differentiæ minores erunt; junctiſque terminorum extremitatibus, numerus laterum polygoni augetur ſecundum numerum terminorum, minora autem erunt latera, ob diminutas terminorum a ſe invicem diſtantias.

Quin in hâc novâ ſerie, diſtantiæ A L, A C &c. determinabunt terminorum ordines ſeu locos, nempe ſi ſit A L quintuplo major quam A C; ſitque C D quartus ab unitate ſeriei terminus: erit L M iſtius ſeriei terminus viceſimus ab unitate.

Si ſic continuo inter binos quoſque terminos inferantur medii proportionales, fiet tandem numerus termi-

I 4 norum

norum feriei, ficut et laterum polygoni, major quolibet dato numero, feu infinitus; latera vero fingula magnitudine diminuta fient quâvis datâ rectâ lineâ minora; adeoque mutabitur polygonum in figuram curvilineam. Nam quælibet figura curvilinea confiderari poteft tanquam polygonum, cujus latera funt numero infinita, et magnitudine minima *.

Curva fic defcripta dicitur *Logarithmica*, in quâ fi numeri per rectas ad axem A N normaliter infiftentes, repræfententur; portio Axis, inter numerum quemlibet et unitatem intercepta, oftendit locum feu ordinem, quem numerus ille obtinet in ferie Geometrice proportionalium, et æqualibus intervallis ab invicem diftantium. Verbi gratiâ, fi A L fit quintuplo major quam A C, fintque ab unitate ad L M mille termini continue proportionales, erunt ab unitate ad C D ducenti termini ejufdem feriei, feu erit C D terminus feriei ducentefimus ab unitate; et quicunque fupponatur numerus terminorum ab A B ad L M, erit iftius numeri pars quinta numerus terminorum ab A B ad C D.

Curva Logarithmica poteft etiam concipi duobus motibus defcribi, quorum unus æquabilis eft, alter vero in datâ quâdam ratione acceleratur, vel retardatur: v. gr. fi recta A B fuper A N uniformiter incedat, adeo ut ter-

* Nempe polygoni Σ Π L M anguli Σ, Δ, B, D &c. five plures illi, five pauciores fuerint, omnes erunt ad curvam quandam, cujus ea eft natura, ut in axe infinito Π L. fumptis ubivis A C, I L æqualibus, ordinatæ a punctis A, C, I, L (æqualium utique axeos fegmentorum terminis) ad perpendiculum eductæ, eandem inter fe rationem gerant, A B ad C D ut I K ad L M.

De mutatione autem polygoni in figuram curvilineam, quafi id revera et actu, ut cum dialecticis loquamur, unquam fieri poffet, et de figuræ curvilineæ tanquam polygoni confideratione, quæ nunquam non abfurda eft; de his, inquam, mallem non locutus effet Keillius, vel ea non locutus, quæ male intellecta tyronum mentes falfis opiniotibus imbuerent. Certe non alium in finem fuam Rationum Primarum et Ultimarum Theoriam *Newtonus* excogitavit, quam ut omnes illæ Indivifibilium, tanquam actu exiftentium, notiones a Geometrarum fermone et fcripiis protenus exularent.

minus

minus ejus A æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribat, interea tamen ita creſcat A B, ut æqualibus etiam temporibus incrementa capiat, quæ ſint toti lineæ creſcenti proportionalia, hoc eſt, ſi A B, progrediendo in *c d*, augeatur parte ſui *o d*; et hinc æquali tempore quando in C D pervenerit, augeatur ſimili parte D *p*, quæ ſit ad *d c*, ut incrementum *d o* ad A B; ſimiliter, dum æquali tempore ad *e f* pervenerit, creſcat parte *f q*, quæ ſit ad D C, ut D *p* ad *d c*, ſeu ut *d o* ad A B, id eſt, in æqualibus temporibus incrementa facta ſint ſemper totis proportionalia:

Vel ſi linea A B, regrediendo in contrariam partem, in conſtanti ratione minuatur, ita ut, dum æqualia ſpatia AΓ, ΓΠ pertranſit, decrementa patiatur AB − ΓΔ, ΓΔ − ΠΣ, quæ ſint ipſis AB, ΓΔ proportionalia; lineæ ſic creſcentis aut decreſcentis terminus Logarithmicam deſcribet. Nam cum ſit A B : *d o* : : *d c* : D *p* : : D C : *f q*, erit componendo A B : *d c* : : *d c* : D C : : D C : *f e*; et ita deinceps.

Per hos duos motus, unum ſcil. æquabilem, alterum proportionaliter acceleratum aut retardatum, ipſe *Neperus* Logarithmorum originem expoſuit. Logarithmum ſinûs cujuſque arcûs vocavit, *Numerum qui quam proxime definit lineam quæ æqualiter crevit, interea dum ſinûs totius linea proportionaliter in ſinum illum decrevit.*

Ex hâc Logarithmicæ deſcriptione conſtat, numeros omnes in æqualibus diſtantiis, eſſe continue proportionales. Quinetiam patet, quod ſi ſint quatuor numeri A B, C D, I K, L M tales, ut diſtantia inter primum et ſecundum ſit æqualis diſtantiæ inter tertium et quartum, qualiſcunque ſit diſtantia ſecundi a tertio, erunt illi numeri proportionales. Nam quia diſtantiæ A C, I L ſunt æquales, erit A B ad incrementum D*s*, ut I K ad incrementum M T; unde componendo A B : D C : : I K : M L. Et viciſſim, ſi quatuor numeri ſint proportionales, erit diſtantia inter primum et ſecundum æqualis diſtantiæ inter tertium et quartum.

Diſtantia inter duos quoſlibet numeros dicitur Logarithmus rationis iſtorum numerorum, et metitur non quidem ipſam rationem, ſed numerum terminorum, in datâ ſerie Geometrice proportionalium, progredientium ab uno numero ad alterum, definitque numerum rationum

num æqualium, quarum compositione efficitur numerorum ratio.

Si distantia inter duos quosvis numeros sit dupla distantiæ inter alios duos numeros; ratio duorum priorum numerorum erit duplicata rationis posteriorum. Sit enim distantia I L inter numeros I K, L M dupla distantiæ A c, quæ est inter numeros A B, c d: bisectâ I L in l, ob A c = I l = l L, erit ratio I K ad l m æqualis rationi A B ad c d; adeoque ratio I K ad L M, quæ est duplicata rationis I K ad l m, (per defin. 10. El. 5.) erit etiam duplicata rationis A B ad c d.

Similiter si distantia E L sit tripla distantiæ A C; erit ratio E F ad L M triplicata rationis A B ad C D. Nam ob distantiam triplam, triplo plures erunt proportionales ab E F ad L M quam sunt ejusdem rationis termini ab A B ad C D: at tam ratio E F ad L M, quam ratio A B ad C D, componitur ex rationibus æqualibus intermediis, (per defin. 5. El. 6.) Adeoque ratio E F ad L M, ex triplo pluribus rationibus composita, triplicata erit rationis A B ad C D. Similiter si sit G L distantia quadrupla distantiæ A c, erit ratio G H ad L M quadruplicata rationis A B ad c d; et ita deinceps.

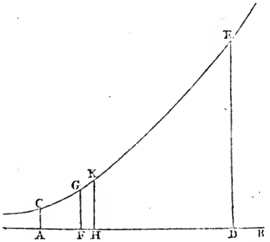
Numeri cujuslibet Logarithmus est Logarithmus rationis unitatis ad ipsum numerum, vel est distantia inter unitatem et illum numerum. Logarithmi itaque exponunt dignitatem, locum, seu ordinem, quem quisque numerus obtinet ab unitate in serie Geometrice proportionalium. Verbi gratiâ, si ab unitate ad numerum 10 sint proportionales numeri 10000000, hoc est, si sit numerus 10 in loco 10000000[mo]; per computationem invenietur, esse in eâdem serie ab unitate usque ad 2 proportionales terminos numero 3010300, hoc est, numerus binarius stabit in loco 3010300[mo]. Similiter ab unitate usque ad 3 invenientur termini proportionales 4771213, qui numerus definit locum numeri ternarii. Numeri 10000000, 3010300, 4771213 erunt Logarithmi numerorum 10, 2, et 3.

Si primus seriei terminus ab unitate dicatur y, erit secundus terminus y^2, tertius y^3, &c. cumque ponitur numerus denarius seriei terminus 10000000[mus], erit $y^{10000000} = 10$. Item erit $y^{3010300} = 2$. Item $y^{4771213} = 3$; et ita deinceps.

Omnes itaque numeri erunt potestates aliquæ illius numeri,

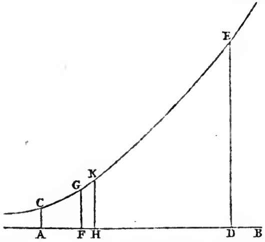
numeri, qui eſt ab unitate primus *. Et poteſtatum indices ſunt numerorum Logarithmi.

* Sed latius accepto Poteſtatis vocabulo; ut non modo quantitates climacticâ ſimplicium multiplicatione genitas ſignificet, ſed eas etiam, quæ radices ex illis extrahendo veniunt, vel quæ climacticâ radicum multiplicatione fiunt. Nimirum $10^{\frac{3}{5}}$ hoc ſenſu dicitur poteſtas denarii, cum ſit radix quinta poteſtatis cubicæ; vel, quod perinde eſt, poteſtas cubica radicis quintæ. Rurſum $10^{11\frac{3}{5}}$, ſeu $10^{\frac{58}{5}}$, poteſtas dicitur denarii, cum ſit radix quinta poteſtatis quinquageſimæ octavæ. Si igitur in ſerie quantitatum, inde ab unitate proportione convenientium, denarius ponatur ab unitate primus, binarius dici poterit poteſtas denarii fractione 0,30103 indicata. Sive $2 = 10^{0,30103} = 10^{\frac{30103}{100000}}$; hoc eſt, binarius poteſtas erit 30103[a] radicis denarii centies milleſimæ. Ternarius autem in eâdem ſerie poteſtas denarii erit fractione 0,4771213 indicata; hoc eſt, $3 = 10^{0,4771213} = 10^{\frac{4771213}{10000000}}$; ſive ternarius poteſtas erit 4771213[a] radicis denarii decies millies milleſimæ. Hæc autem ope curvæ Logarithmicæ optime intelligenda ſunt. In curvâ ſcilicet Logarithmicâ, cujus axis recta infinita AB, aptentur ordinatæ AC, FG, HK, DE: quarum DE ipſius AC decupla ſit, FG ejuſdem dupla, HK tripla. Abſciſſa igitur AF, quæ di-



ſtantia

Cum Logarithmi ſint diſtantiæ numerorum ab unitate, ut ſuperius oſtenſum eſt; erit Logarithmus ipſius unitatis o, nam unitas non diſtat a ſeipſâ. At fractionum Logarithmi ſunt negativi, ſeu infra nihil deſcendentes, hi enim in contrariam diſcedunt partem; adeoque ſi numeri ab unitate proportionaliter creſcentes habeant Logarithmos poſitivos, ſeu ſigno + affectos; numeri ab unitate ſimiliter decreſcentes, ſeu fractiones, habebunt Logarithmos negativos, ſeu ſigno— affectos *.



ſtantia eſt ordinatæ F G ab A C, ad abſciſſam A D, ſeu ordinatæ D E ab A C diſtantiam, rationem habebit eam, quam fractio 0,30103 ad unitatem. Abſciſſa autem A H, ſeu diſtantia ordinatæ H K ab A C, ad abſciſſam A D rationem habebit eam, quam fractio 0,4771213 ad unitatem. Ordinatæ autem D E, F G, H K ſunt ut numeri 10, 2, 3; abſciſſæ A D, A F, A H ut eorum Logarithmi, poſitâ ſcilicet A C unitate.

* Nimirum ſi proximus ab unitate numerus ſit y, ſecundus y^2, tertius y^3, &c. proximus a contrariâ parte erit $\frac{1}{y}$, ſecundus $\frac{1}{y^2}$, tertius $\frac{1}{y^3}$, &c. numerorum ſcilicet $y, y^2, y^3 * * * y^n$ reciproci. Et cum numerorum $y, y^2, y^3, y^4 * * * y^n$ Logarithmi

Quod verum eſt quando Logarithmi æſtimantur per diſtantias numerorum ab unitate.

At ſi initium capiunt Logarithmi non ab unitate integrali, ſed ab unitate, quæ eſt in loco aliquo fractionum decimalium, verbi gratiâ, a fractione $\frac{1}{1\,00000\,00000}$; tunc omnes fractiones, hâc majores, habebunt Logarithmos poſitivos; reliquæ, minores, obtinebunt Logarithmos negativos, ſed de hâc re plura poſtea dicentur.

Cum in numeris continue proportionalibus DC, EF, GH, IK, &c. diſtantiæ CE, EG, GI, &c. ſint æquales, erunt horum numerorum logarithmi AC, AE, AG, AI, &c. æquidifferentes, ſeu Logarithmorum differentiæ erunt æquales. Numerorum itaque proportionalium Logarithmi ſunt omnes in progreſſione Arithmeticâ. Atque hinc oritur vulgaris illa Logarithmorum definitio, viz. Logarithmi ſunt numeri, qui proportionalibus adjuncti, æquales ſervant differentias. Fig. 2.

In primâ, quam *Neperus* edidit, Logarithmorum ſpecie poſuit terminorum proportionalium ab unitate primum, tantum ab unitate diſtare, quantum ipſe terminus unitatem ſuperabat: h. e. ſi vn ſit primus ſeriei terminus ab unitate AB, ejus Logarithmum, ſeu diſtantiam An vel By, æqualem eſſe voluit ipſi vy, ſeu incremento numeri ſupra unitatem; ut ſi vy ſit 1, 0000001, ejus Logarithmum An ponebat 0, 0000001; et hinc, computatione factâ, Numerus Denarius, ſeu 10, erit 23025850^{us} ſeriei terminus; qui itaque numerus eſt Logarithmus denarii in hâc Logarithmorum formâ, et exprimit ejus diſtantiam ab unitate in partibus, quarum vy vel An eſt una.

At hæc poſitio omnino arbitraria fuit, poteſt enim diſtantia primi termini, ad ipſius exceſſum ſupra unita-

rithmi ſint 1, 2, 3, 4, * * * n; fractionum $\frac{1}{y}, \frac{1}{y^2}, \frac{1}{y^3}, \frac{1}{y^4}$ * * * $\frac{1}{y^n}$ erunt $-1, -2, -3, -4$ * * * $-n$ Logarithmi. Poſito autem $y = 10$, numerorum 10, 100, 1000, 10000, &c. erunt 1, 2, 3, 4, &c. Logarithmi; fractionum autem 0, 1; 0, 01; 0, 001; 0, 0001 Logarithmi erunt -1; -2; -3; -4; &c.

tem,

tem, datam quamvis habere proportionem; et pro variâ illâ ratione, quæ pro arbitrio ſupponi poteſt, eſſe inter *vy* et B*y*, incrementum primi termini ſupra unitatem et ejuſdem ab unitate diſtantiam, diverſæ provenient Logarithmorum formæ.

Primam hanc Logarithmorum ſpeciem in aliam magis commodam poſtea mutavit *Neperus*, in quâ poſuit numerum denarium non eſſe 2302585o^{mum} ſeriei terminum, ſed terminum 10000000^{mum}; inque hâc Logarithmorum formâ, primum incrementum *vy* erit àd diſtantiam B*y* vel A*n*, ut unitas ſeu A B ad fractionem decimalem, 0,4342944; quæ itaque exponet longitudinem ſubtangentis A T. In *Fig.* 4^{tâ}.

Poſt mortem *Neperi*, vir ſummus Dominus *Henricus Briggius*, immenſo labore, Logarithmorum tabulas ad hanc formam conſtruxit et edidit. In hiſce tabulis cum Logarithmus denarii, ſeu ejus diſtantia ab unitate, ponatur 1,0000000, ſintque 1, 10, 100, 1000, 10000, &c. continue proportionales, erunt æquidiſtantes. Quare numeri 100 Logarithmus erit 2, 0000000; millenarii 3,0000000; et numeri 10000 Logarithmus fiet 4,0000000; et ita deinceps.

Hinc Logarithmi omnium numerorum inter 1 et 10 incipere debent per 0, ſeu debet eſſe 0 in primo loco verſus ſiniſtram; ſunt enim minores quam Logarithmus numeri 10, cujus initium eſt unitas: et Logarithmi numerorum inter 10 et 100 unitate incipiunt; ſunt enim majores quam 1,0000000 et minores quam 2,0000000. Item Logarithmi numerorum inter 100 et 1000 binario incipiunt; ſunt enim majores quam Logarithmus numeri 100, quem incipit 2, et minores Logarithmo numeri 1000, qui incipit per 3: eodem modo oſtendetur in Logarithmis numerorum inter 1000 et 10000, primam figuram verſus ſiniſtram debere eſſe 3; et in Logarithmis numerorum ab 10000 uſque ad 100000 prima verſus ſiniſtram figura erit 4, et ita deinceps *.

* Elegantior longe, et doctioribus Geometris receptior, eſt illa Logarithmorum conſideratio, quæ denarium primum conſtituit ſeriei terminum. Ita enim Logarithmi poteſtatum denarii, 10, 100, 1000, &c. (poteſtates jam nunc loquimur proprie ſic dictas) ſunt numeri 1, 2, 3, 4, &c. naturali ordine: numerorum autem poteſtatibus denarii intermediorum Logarithmi ſunt numeri

Prima cujusque Logarithmi figura versus sinistram dicitur characteristica, seu index; quia ostendit altissimum seu remotissimum locum nnmeri a loco unitatum. v. gr. Si index Logarithmi sit 1, numeri respondentis altissimus seu remotissimus versus sinistram ab unitate locus, erit locus decadum. Si index 2, remotissima numeri respondentis figura erit in secundo ab unitatum loco, hoc est, erit centenariorum aliquis. Et index Logarithmi 3 denotat altissimam numeri sui figuram esse in tertio ab unitatum loco, et inter millenarios locari *.

Logarithmi numerorum omnium, qui sunt in progressione decuplâ aut subdecuplâ, characteristicis seu indicibus suis tantum differunt; in reliquis omnibus locis, iisdem scribuntur notis, v. gr. Logarithmi numerorum 17, 170, 1700, 17000. Nam cum sit 1 ad 17, ut 10 ad 170, ut 100 ad 1700, ut 1000 ad 17000; distantiæ inter 1 et 17, inter 10 et 170, inter 100 et 1700, inter 1000 et 17000 erunt omnes æquales; ideoque cum distantia inter 1 et 17, seu Logarithmus numeri 17, sit

meri mixti; quorum pars integralis cujusque est Index, partem fractionalem constituunt figuræ post Indicem, quotquot illæ fuerint. Minorum autem denario Logarithmi puræ fractiones sunt, Indicis, seu unitatum locum, notâ o occupante. Hæc autem ad finem hujusce capitis fusius exponenda erunt. Cæterum hæc est vera, ni fallor, systematis *Briggiani* expositio, quam obscurarunt, me judice, quicunque denarium loco ab unitate decies millies millesimo (10000000°.) potius quam in primo constitutum volunt. Neque enim inde efficient, quod illis in votis est, ut vulgi hominum ingeniis subtilissima Logarithmorum doctrina facilius percipi et comprehendi queat. Quantum quantum enim posuerint denarii in serie indicem, illud nunquam obtinebunt ut aliorum numerorum indices non sint mixti sæpe, sæpissime etiam inter se incommensurabiles. Incommensurabilium autem mysteria vix aut ne vix quisquam intelliget, qui scientiis nostris non magis quam mediocriter imbutus sit—
μηδ' ὅςις γενναίων ὄργια Μουσῶν μητ' εἴδετο μητ' ἐχόρευσε.

* Sed et indicum negativorum par est ratio. Nimirum index −1, ostendit primam fractionis decimalis, ad quam Logarithmus pertinet, figuram locum infra unitatem proximum occupare. Si index Logarithmi sit −2, prima fractionis decimalis figura locum infra unitatem secundum occupabit. Si −3, tertium; si −4, et sic deinceps.

2304489

1.2304489, erit Logarithmus numeri 170 = 2.2304489; et Logarithmus numeri 1700 erit 3.2304489, ob numeri 100 Logarithmum = 2.0000000; et similiter, ob numeri 1000 Logarithmum = 3.0000000, Logarithmus numeri 17000 erit 4.2304489.

Sic etiam numeri 6748. 674,8. 67,48. 6,748. 0,6748. 0,06748. sunt continue proportionales, scil. in ratione 10 ad 1. Eorum itaque a se invicem distantiæ æquales erunt distantiæ, seu Logarithmo, numeri 10, seu æquales 1,0000000. Quare cum Logarithmus numeri 6748 sit 3,8291751, reliquorum Logarithmi erunt ut in margine.

6748	3,8291751
674,8	2,8291751
67,48	1,8291751
6,748	0,8291751
0,6748	−1,8291751
0,06748	−2,8291751

In duobus ultimis Logarithmis, indices tantum sunt negativi, reliquis figuris positivis manentibus; adeoque cum reliquæ figuræ addendæ sunt, subtrahendi erunt indices, et vice versa*.

* Nimirum cum 6,748 sit ad 0,6748 ut 10 ad 1; si Logarithmo numeri 6,748 auferatur Logarithmus denarii, relinquetur Logarithmus numeri 0,6748. Sed Logarithmus numeri 6,748 est 0.8291751. Et denarii Logarithmus est 1. Numeri igitur 0,6748 Logarithmus erit + 0.8291751 − 1. Qui hoc modo commodissime designandus est $\overline{1}.8291751$. Similiter cum numerus 6,748 ad 0,06748 rationem habeat, quam centenarius ad unitatem; si Logarithmo numeri 6,748 auferatur centenarii Logarithmus, relinquetur Logarithmus numeri 0,06748. Sed Logarithmus numeri 6,748 est 0.8291751, et Logarithmus centenarii est binarius, sive 2. Logarithmus igitur numeri 0,06748 erit + 0.8291751 − 2: sive $\overline{2}.8291751$.

Illud autem animadvertendum est: in systemate *Briggiano* Logarithmi cujusque indicem numerum integralem esse; figuras autem omnes reliquas, quæ indicem sequuntur, decimales esse. Nam cum in illo systemate, denarii et potestatum ejus 10, 100, 1000, 10000, &c. Logarithmi sint numeri 1, 2, 3, 4, &c. naturali serie; numeri cujusque inter 10 et 10^2, sive inter denarium et centenarium, Logarithmus unitate major erit, binario autem minor. Numerus igitur mixtus inter unitatem et binarium. Rursum cujusque inter 10^2 et 10^3, sive inter centenarium

CAPUT II.

De Logarithmorum Arithmeticâ ubi numeri ſunt integri, vel integri cum decimalibus adjunctis.

QUONIAM in multiplicatione, unitas eſt ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum, diſtantia inter unitatem et multiplicatorem æqualis erit diſtantiæ inter multiplicandum et productum; ſi itaque numerus G H per numerum E F eſſet multiplicandus, diſtantia inter G H et productum debet eſſe æqualis diſtantiæ A E, ſeu Logarithmo multiplicatoris; ſi itaque capiatur G L æqualis A E, erit numerus L M productus; hoc eſt, ſi ad A G, Logarithmum multiplicandi, addatur A E, Logarithmus multiplicatoris, ſumma erit Logarithmus producti.

In Diviſione, unitas eſt ad diviſorem ut quotus ad dividendum; adeoque diſtantia inter diviſorem et unitatem æqualis erit diſtantiæ inter dividendum et quotum. Sic ſi L M per E F eſſet dividendus, erit diſtantia E A æqualis diſtantiæ inter L M et quotum; adeoque ſi capiatur L G æqualis E A, ad G erit quotus; hoc eſt, ſi ab A L, Logarithmo dividendi, auferatur G L ſeu A E, Logarithmus diviſoris, reſtabit A G, Logarithmus quotientis.

Atque hinc adeo, quæcunque operationes in communi Arithmeticâ perficiuntur multiplicando aut dividendo numeros majores, eæ omnes facilius multo et expeditius fiunt per additionem aut ſubductionem Logarithmorum.

narium et millenarium, Logarithmus binario major erit, ternario autem minor. Mixtus igitur inter binarium et ternarium. Univerſe, numeri cujuſque inter 10^n et 10^{n+1} Logarithmus major erit quam n, minor autem quam $n+1$. Mixtus igitur inter n et $n+1$.

Sit, exempli gratiâ, numerus 7589 multiplicandus per 6757. Addendo Logarithmos, ut in margine videre est, habetur Logarithmus producti; cujus index 7 monstrat esse in producto septem locos præter unitatum locum: et quærendo in tabulis Logarithmum hunc, vel proxime æqualem, invenio numerum respondentem minorem producto esse 51278000 et numerum producto majorem esse 51279000; quin capiendo differentias adjunctas, et partes proportionales, invenio notas antepenultimam et penultimam esse 87; in ultimo autem, seu in unitatum loco, necessario erit 3, ob septies novem = 63, adeoque verus productus erit 51278873.

Log. 3. 8801846
Log. 3. 8297539
Log. 7. 7099385

Si index Logarithmi esset 8 vel 9, ultima vel penultima notæ obtineri non possunt ex tabulis ubi Logarithmi tantum constant 7 figurarum locis præter characteristicam; adeoque ubi opus est, Tabulæ *Ulacquianæ*, in quibus Logarithmi sunt omnes decem notarum, vel *Briggianæ*, in quibus Logarithmi sunt quatuordecim, adeundæ erunt.

Si numerus 78596 dividendus sit per 278, substrahendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi habetur Logarithmus quotientis; cui Logarithmo respondet numerus 282,719, qui itaque erit quotiens *.

Log. 4. 8954004
Log. 2. 4440448
Log. 2. 4513556

* Et par est ratio operationum multiplicationis et divisionis in fractionibus: nimirum cum Logarithmus facti summæ Logarithmorum numerorum, ex quibus factus est, æqualis sit; sive integri illi sint, sive fractiones. In multiplicatione igitur invenitur Logarithmus facti, addendo efficientium Logarithmos. Et in divisione Logarithmus quotientis invenitur subducendo Logarithmum divisoris ex Logarithmo dividendi, modo signis + et — probe observatis, additiones et subductiones Algebraice instituantur. Res exemplis manifesta fiet.

MULTIPLICATIONIS EXEMPLA.

Ex. 1. Multiplicandus sit numerus 7589 in fractionem 0,6757.

Loga-

Cum unitas, numerus quilibet aſſumptus, ejus quadratus, cubus, biquadratus, &c. ſint continue propor-

Logarithmus numeri 7589 eſt 3.8801846
Logarithmus fractionis 0, 6757 eſt $\bar{1}.8297539$

Summa 3.7099385
eſt Logarithmus facti, qui in tabulis invenietur 5127,887.

Ex. 2. Multiplicandus ſit numerus 75,89 in fractionem 0,006757.
Logarithmus numeri 75,89 eſt 1.8801846
Logarithmus fractionis 0,006757 eſt $\bar{3}.8297539$

Summa $\bar{1}.7099385$
eſt Logarithmus facti, qui in tabulis invenietur 0, 5127887.

Ex. 3. Fractiones 0, 7589; 0, 06757 in ſe mutuo multiplicandæ ſint.
Fractionis 0, 7589 Logarithmus eſt $\bar{1}.8801846$
Fractionis 0, 06757 Logarithmus eſt $\bar{2}.8297539$

Summa $\bar{2}.7099385$
Logarithmus eſt fractionis multiplicatione efficiendæ, quæ in tabulis invenietur 0, 05127887.

DIVISIONIS EXEMPLA.

Ex. 1. Numero 78596 dividenda ſit fractio 0,278.
Fractionis dividendæ 0, 278 Logarithmus eſt $\bar{1}.4440448$
Numeri diviſoris 78596 Logarithmus eſt 4.8954004

Logarithmo poſteriori de primo Algebraice ſubtracto, veniet quotientis Logarithmus $\bar{6}.5486444$
Quotiens igitur in tabulis invenietur 0,000003537075.

Ex. 2. Fractione 0,278 dividendus ſit numerus 78596.
Numeri dividendi 78596 Logarithmus eſt 4.8954004
Fractionis dividentis 0,278 Logarithmus eſt $\bar{1}.4440448$

Logarithmo poſteriori de primo Algebraice ſubtracto, veniet quotientis Logarithmus 5.4513556
Quotiens igitur in tabulis invenietur 282719,3.

tionales, eorum a ſe invicem diſtantiæ æquales erunt. Manifeſtum itaque eſt quadrati diſtantiam ab unitate,

Ex. 3. Fractio 0,0278 fractione 0,78596 dividenda ſit.
Fractionis dividendæ 0,0278 Logarithmus eſt $\bar{2}.4440448$
Fractionis dividentis 0,78596 Logarithmus eſt $\bar{1}.8954004$

Logarithmo poſteriori de primo Algebraice ſubtracto, veniet quotientis Logarithmus $\bar{2}.5486444$
Quotiens igitur in tabulis invenietur 0,03537075.

Ex. 4. Fractio 0,78596 fractione 0,0278 dividenda ſit.
Fractionis dividendæ 0,78596 Logarithmus eſt $\bar{1}.8954004$
Fractionis dividentis 0,0278 Logarithmus eſt $\bar{2}.4440448$

Logarithmo poſteriori de primo Algebraice ſubtracto, veniet quotientis Logarithmus 1.4513556
Quotiens igitur in tabulis invenietur 28,27193.

Hunc igitur in modum in fractiones, decimalium formâ datas, operationes, tam diviſionis quam multiplicationis, per Logarithmos inſtituantur; haud aliter ſcilicet quam in numeros integrales vel mixtos.

Quinetiam fractiones, quæ ſub vulgarium quæ vocantur ſpecie veniunt, ſimili modo tractandæ ſunt, inventis earum Logarithmis. Logarithmi autem hâc ratione facillime inveniendi.

Datam puta fractionem vulgarem $\frac{A}{B}$, in propriarum quæ vocantur genere, cujus requiritur Logarithmus. Tabularum ope inveniatur Logarithmus numeri $\frac{B}{A}$, datæ fractionis reciproci, ſubducendo ſcilicet Logarithmum diviſoris A de Logarithmo dividendi B. Logarithmus autem ſic inventus numeri $\frac{B}{A}$ ſignificetur literâ L. Logarithmus L denario auferatur, vel poteſtati denarii quæ ipſo L proxime ſit major, quæ ſit 10^n. Reſiduus ſignificetur literâ R. Denique indici Logarithmi R Algebraice ſubtrahatur 10^n. Habebitur Logarithmus indice negativo, qui Logarithmus ſignificetur literâ A. Dico A datæ fractionis $\frac{A}{B}$ Logarithmum eſſe.

Fractionis enim $\frac{A}{B}$ Logarithmus ſignificetur literâ X. Jam

cum

duplam esse distantiæ radicis ab eâdem: distantiam cubi triplam distantiæ radicis suæ, biquadrati distantiam esse distantiæ radicis suæ ab unitate quadruplam &c. Adeoque si duplicetur Logarithmus numeri, dabitur Logarithmus quadrati; si triplicetur, Logarithmus cubi; si quadruplicetur, prodit Logarithmus biquadrati. Et, vice versâ, si Logarithmus numeri alicujus bisecetur, habebitur Logarithmus radicis quadratæ ejusdem numeri; quin et ejusdem Logarithmi tertia pars erit Logarithmus radicis cubicæ; et pars quarta Logarithmus radicis biquadraticæ, et ita deinceps.

Hinc radicum omnium extractiones facillime perficiuntur, secando Logarithmum in tot partes, quot sunt unitates in indice potestatis. Sic ut habeatur radix quadrata numeri 5, ejus Logarithmi capiatur pars di-

cum $\frac{A}{B}$ ad 1 eandem rationem habeat, quam 1 ad $\frac{B}{A}$, et numeri $\frac{B}{A}$ Logarithmus sit L; erit X (Logarithmus fractionis $\frac{A}{B}$) $= -L$ (per ea quæ a Keillio jam ante ostensa sunt). Sed $-L = 10^n - L - 10^n$. Et $\Lambda = 10^n - L - 10^n$ (per construct.) Quare $X = \Lambda$. *Q. E. D.*

Ex. 1. Fractionis vulgaris $\frac{29}{517}$ inveniendus sit Logarithmus. Fractionis $\frac{29}{517}$ est numerus $\frac{517}{29}$ reciprocus. Et hujus numeri Logarithmus ex tabulis invenietur 1.2510925.
Qui denario ablatus relinquit 8.7489075.
Hujus indici 8 ablato Algebraice denario,
habebitur $\overline{2}.7489075$
Logarithmus fractionis $\frac{29}{517}$. Logarithmo autem sic invento, si in tabulis qnæratnr numerus qui conveniat, illæ decimalem dabunt datæ vulgari æqualem. Ut in hoc exemplo 0,05609285.

Ex. 2. Fractionis vulgaris $\frac{17}{4934721}$ inveniendus sit Logarithmus.

Fractionis datæ est numerus $\frac{4934721}{17}$ reciprocus. Hujus autem Logarithmus ex tabulis invenietur 5.4628146
Qui denario ablatus relinquit 4.5371854
Hujus indici, quaternario, subtracto Algebraice denario, habebitur $\overline{6}.5371854$
Logarithmus datæ fractionis. Cujus itaque æqualis in tabulis invenietur decimalis 0,00000344497.

 midia

midia 0.3494850; erit hæc Logarithmus radicis quadratæ numeri 5, ſeu Logarithmus numeri $\sqrt{5}$, cui reſpondet numerus 2,23606 quam proxime*.

* Et cujuſcunque numeri, ſive integralis ſit, ſive mixtus, ſive pura fractio, ſi radix $\frac{1}{m}$ extrahenda ſit, dividendo Logarithmum dati numero m habebitur Logarithmus radicis. Ut ſi numeri 753, 571 radix cubica per Logarithmos extrahenda eſſet; dati numeri 753, 571 Logarithmum 2.8771242

Divido Ternario

Habeo 0.9590414

Logarithmum radicis cubicæ. Quam in tabulis invenio numerum mixtum 9,1.

Sed cum omnis puræ fractionis Logarithmus indice conſtat negativo cum figuris aliis poſitivis, et ad radicis $\frac{1}{m}$ inventionem utraque pars Logarithmi, tam negativa quam poſitiva, numero m dividenda ſit; evenire poteſt talem eſſe indicem negativum, quem numerus m non metiatur. Quod ſi acciderit, utraque pars Logarithmi radicis, tam negativa quam poſitiva, pluribus conſtabit figuris. Et calculatori omnino labor ille ſubeundus erit, quem in capite inſequente *Keillius* tantopere deprecatur, partem alteram alteri ſubducendi. Ut ſi fractionis 0,753571 radix cubica extrahenda eſt, Logarithmus datæ fractionis ternario dividendus. Sed datæ fractionis Logarithmus eſt $\bar{1}.8771242$, conſtans indice negativo 1, et decimali poſitivâ 0,8771242. Utraque autem pars ternario dividenda. Ternarius autem indicem $\bar{1}$ non metitur.

Ex diviſione igitur indicis negativi veniet quæ pars erit negativa Logarithmi radicis.	− 0.3333333
Et ex diviſione poſitivæ decimalis 0,8771242 veniet	+ 0.2923747
Negativam vero poſitivæ auferendo habeo ſcilicet	$\bar{1}.9590414$

Logarithmum radicis cubicæ quæſitæ, quamque ideo in tabulis invenio 0,91.

Nactus ſum igitur, Dìs propitiis uſus, Logarithmum radicis et radicem ipſam, ſed non ſine labore ſubtractionis Algebraicæ. Hem! Aliam igitur tibi, lector, monſtro viam, quâ laborem illum, ſi ſubire metuas, ſemper effugias, illâ, quam *Keillius* tibi traditurus eſt, longe, ni fallor, expeditiorem, ſed paucis credo præter nos ipſos tritam.

Datæ

CAPUT III.

De Arithmeticâ Logarithmorum, ubi numeri sunt Fractiones.

QUOTIESCUNQUE fractiones per Logarithmos tractandæ fuerint, ad vitandum laborem addendi unam Vide Fig. 3.

Datæ fractionis $\frac{A}{B}$ extrahenda sit per Logarithmos radix $\frac{I}{m}$; id est, inveniendus sit Logarithmus radicis $\frac{I}{m}$ fractionis datæ.

Fractionis $\frac{A}{B}$ erit numerus $\frac{B}{A}$ reciprocus. Hujus numeri ex tabulis inveniatur Logarithmus L. Numero m dividatur L. Quotiens significatur literâ Q. Erit Q Logarithmus radicis $\frac{I}{m}$ numeri $\frac{B}{A}$; sive Logarithmus numeri $\frac{B^{\frac{1}{m}}}{A^{\frac{1}{m}}}$. Auferatur igitur Logarithmus Q denario, vel potestati denarii, quæ ipso Q proxime sit major; quæ sit 10^n. Residuus significetur literâ R. Indici Logarithmi R subtrahatur Algebraice numerus 10^n. Veniet Logarithmus indice negativo, qui Logarithmus significetur literâ A. Dico A Logarithmum esse radicis $\frac{I}{m}$ fractionis $\frac{A}{B}$, sive fractionis $\frac{A^{\frac{1}{m}}}{B^{\frac{1}{m}}}$.

Cum enim $\frac{A^{\frac{1}{m}}}{B^{\frac{1}{m}}}$ ad I eandem rationem habeat, quam I ad $\frac{B^{\frac{1}{m}}}{A^{\frac{1}{m}}}$; si Logarithmus fractionis $\frac{A^{\frac{1}{m}}}{B^{\frac{1}{m}}}$ significetur literâ X, cum numeri $\frac{B^{\frac{1}{m}}}{A^{\frac{1}{m}}}$ Logarithmus sit Q, erit $X = -Q$. Sed $-Q = 10^n - Q - 10^n$. Et $10^n - Q = R$ (per construct.) Quare $-Q = R - 10^n$. Sed $R - 10^n = A$ (per construct.) Unde efficitur $X = A$.

Logarithmi partem, et fubducendi alteram, expedit * ut Logarithmi incipiant non ab unitate integrali, fed

Ex. Inveniendus fit Logarithmus radicis cubicæ fractionis $\frac{27}{753571}$.

Datæ fractionis reciprocus eft numerus $\frac{753571}{27}$.

Hujus Logarithmum ex tabulis invenio	4.4457604
Divido ternario. Habeo	1.4819201
Hunc denario aufero. Habeo	8.5180799
Indici 8 denario Algebraice fubtracto, habeo	$\bar{2}$.5180799

Logarithmum radicis cubicæ fractionis $\frac{27}{753571}$. Unde radicem ipfam in tabulis vulgaribus invenio 0,032967. Sed in tabulis *Briggianis*, quæ Logarithmos exhibent decimum quartum ufque decimalium locum, radicem quæfitam invenio 0,032967'032967'032967', quæ vulgari $\frac{32967}{999999}$, five (ad minimos terminos reductione factâ) vulgari $\frac{3}{91}$ æqualis eft.

Ut fimili modo tractentur fractiones, quæ decimalium formâ datæ funt, nil aliud opus eft quam ut fiftantur vulgarium formâ.

Ex. 1. Inveniendus fit Logarithmus radicis quintæ fractionis decimalis 0,1926867.

Pono 0,1926867 = $\frac{1926867}{10000000}$. Reciprocus eft $\frac{10000000}{1926867}$.

Hujus Logarithmum ex tabulis invenio	0.7151482
Divido quinario. Habeo	0.1430296
Hunc denario aufero. Habeo	9.8569704
Indici 9 denario Algebraice fubtracto, habeo	$\bar{1}$.8569704

Logarithmum radicis quintæ fractionis datæ. Unde radix ipfa in tabulis invenietur 0,7194.

Ex. 2. Inveniendus fit Logarithmus radicis cubicæ fractionis decimalis 0,815'815'815'.

Data decimalis æqualis eft vulgari $\frac{815}{999}$. Cujus reciprocus eft $\frac{999}{815}$.

Hujus autem Logarithmus eft	0.0884079
Divido ternario. Habeo	0.0293693
Hunc denario aufero. Habeo	9.9706307
Indici 9 denario Algebraice fubtracto, habeo	$\bar{1}$.9706307

Logarithmum radicis cubicæ fractionis datæ. Unde radicem ipfam in tabulis invenio 0,93461.

* Mea certe contraria eft opinio: expedire potius ut, manente Logarithmorum initio apud ipfam unitatem integralem, fractionum Logarithmi indices gerant negativos. Ita enim labor, me judice, leviffimus, notatio certa, operandi ratio apertiffima. Illud autem præcipuum, quod notatio, ut dixi, certa fit

et

ab unitate, quæ ſit in decimo vel centeſimo loco fractionum decimalium, v. gr. pone P O eſſe $\frac{1}{10000000000}$ et Logarithmos ab ejus loco incipere. Hæc fractio decies magis diſtabit ab unitate verſus ſiniſtram, quam numerus 10 ab eâdem diſtat verſus dextram; ſunt enim decem termini proportionales in ratione 10 ad 1 ab unitate uſque ad P O. Adeoque ſi A B ſit unitas, ejus Logarithmus in hâc ſuppoſitione non erit 0, ſed erit O A = 10.0000000. Nam diſtantia denarii ab unitate eſt 1.0000000. Unde diſtantia numeri 10 a P O erit 11.0000000: item diſtantia numeri 100 a P O, ſeu ejus Logarithmus a P O incipiens, erit 12.000 0000; et numeri 1000 Logarithmus, ſeu diſtantia a P O, erit 13.000 0000; atque hâc ratione Logarithmorum omnium indices augentur numero 10: et fractiones quarum indices fuerunt − 1, aut − 2, aut − 3 &c. fiunt 9, 8, aut 7 &c.

At ſi Logarithmi incipiunt a loco fractionis, cujus numerator eſt unitas; denominator unitas centum cyphris adjectis (quod faciendum eſt quoties fractiones occurrunt minores quam P O) illa fractio centies plus diſtabit ab unitate quam 10 ab eâ diſtat, adeoque unitatis Logarithmus habebit indicem 100: numeri denarii Logarithmus indicem habebit 101: et numeri centenarii Logarithmo congruet index 102. Et ita deinceps indices omnes augentur numero 100.

Fractionum omnium quæ ſunt majores P O (a quo initium ducitur) Logarithmi erunt poſitivi. Et cum numeri, 10, 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c. ſunt in continuâ progreſſione Geometricâ, æqualiter a ſe invicem diſtabunt, et eorum proinde Logarithmi erunt æquidifferentes; adeoque cum Logarithmus denarii ſit 11.0000000, et

et diſtincta. Puta enim calculis methodo, quam *Keillius* tradit, ſubductis, Logarithmum prodire 8.7349678. Rogo, cujuſnam numeri ſit ille Logarithmus? num numeri 543210000, an fractionis 0,054321? At in noſtrâ indicum negativorum methodo φεύδη plane omnis iſtiuſmodi ambiguitas. Cum numerorum et fractionis Logarithmi, reliquis figuris convenientes, indicibus diſtinguuntur. Nobis certe Logarithmus numeri 543210000 eſt 8.7349678, fractionis autem 0,054321 eſt Logarithmus $\bar{2}.7349678$.

unitatis

unitatis Logarithmus sit 10.0000000; erit Logarithmus fractionis $\frac{1}{10} = 9.0000000$; et fractionis $\frac{1}{100}$ Logarithmus erit 8.0000000; et similiter index Logarithmi numeri $\frac{1}{1000}$ erit 7. Quinetiam eâdem ratione si index Logarithmicus unitatis sit 100, et denarii 101; erit index Logarithmi fractionis $\frac{1}{10}$, 99; et fractionis $\frac{1}{100}$ index Logarithmi erit 98; et fractionis $\frac{1}{1000}$ index Logarithmicus erit 97 &c. Hi indices ostendunt in quo loco ab unitate prima fractionis figura, quæ cyphra non sit, ponenda fuerit: v. gr. si index sit 4, ejus differentia ab indice unitatis quæ est 10, scil. 6, ostendit primam decimalis figuram significativam esse in 6to ab unitate loco; ergo quinque cyphræ versus sinistram ei præponendæ sunt. Ita si unitatis index sit 100 et fractionis index sit 80, erit prima ejus figura in vicesimo ab unitatis loco seu 19 cyphræ præponendæ erunt.

Sit jam fractio G H per fractionem D C multiplicanda. Quia unitas est ad multiplicatorem ut multiplicandus ad productum; erit distantia inter unitatem et multiplicatorem æqualis distantiæ inter multiplicandum et productum. Quare si capiatur $GI = AC$, ad I erit productus I K. Et proinde si ab O G, Logarithmo multiplicandi, auferatur G I vel A C, restabit O I Logarithmus producti. Est vero $AC = OA - OC$; quâ ablatâ ab O G, relinquetur $OG + OC - OA = OI$: hoc est, si simul addantur Logarithmi multiplicatoris et multiplicandi, et e summâ auferatur Logarithmus unitatis (qui semper scribitur per 10 aut 100 cum cyphris) habebitur Logarithmus producti. Ex. gr. sit fractio decimalis 0,00734 per fractionem 0,000876 multiplicanda: pono unitatis indicem Logarithmicum esse 100, et fractionum Logarithmi erunt ut in margine; qui additi, et rejecto Logarithmo unitatis, dant Logarithmum producti, cujus index 94 ostendit primam producti figuram esse in sexto ab unitatum loco; quinque itaque cyphræ præponendæ sunt, et productus erit, 0,00000642984.

$$\begin{array}{r} 97.8656961 \\ 96.9425041 \\ \hline 94.8082002 \end{array}$$

In Divisione, divisor est ad unitatem, ut dividendus ad quotum; et proinde distantia inter divisorem et unitatem, æqualis erit distantiæ inter dividendum et quotum. Itaque si fractio I K dividenda esset per D C, capienda erit $IG = CA$, et locus quoti erit G. Est vero

C A

CA = OA − OC quæ, ad OI addita, fit OA + OI − OC = OG: hoc eſt, ſi addatur Logarithmus unitatis ad Logarithmum dividendi, et e ſummâ auferatur Logarithmus diviſoris, reſtabit Logarithmus quotientis. Sic ſi numerus CD per IK eſſet dividendus, capienda erit diſtantia CS = IA, et erit ST quotiens; cujus Logarithmus eſt OA + OC − OI. Sit CD = 0,347; IK = 0,00478. Ad Logarithmum ipſius CD addatur Logarithmus unitatis, hoc eſt, ejus indici præponatur 1 aut 10, et ex eo ſubducatur Logarithmus diviſoris, reſtabit Logarithmus quotientis, cujus index 11 monſtrat quotientem eſſe inter numeros, qui ſunt a 10 ad 100. Quæro itaque numerum Logarithmo reſpondentem, quem invenio eſſe 72,594.

$$\begin{array}{r} 19.5403295 \\ 7.6794279 \\ \hline 11.8609016 \end{array}$$

Si fractionis vulgaris, verbi gr. $\frac{7}{8}$ Logarithmus deſideretur, ad Logarithmum numeri 7 addatur Logarithmus unitatis, vel quod idem eſt, ejus indici præponatur 1 aut 10, et ſubducatur ab eo Logarithmus denominatoris 8, reſtabit Logarithmus fractionis $\frac{7}{8}$ vel fractionis decimalis, 875.

$$\begin{array}{r} 10.8450980 \\ 0.9030900 \\ \hline 9.9420080 \end{array}$$

Ut fractionis cujuſlibet DC poteſtates habeantur, capiendæ ſunt EC, EG, GI, IL ſingulæ æquales AC, et EF erit quadratus, GH cubus, IK biquadratus numeri DC, ſunt enim ab unitate continue proportionales. Eſt præterea AE = 2 AC = 2 OA − 2 OC; unde OE = OA − AE = 2 OC − OA: hoc eſt, Logarithmus quadrati eſt duplus Logarithmi radicis minus Logarithmo unitatis. Similiter ob AG = 3 AC = 3 OA − 3 OC, erit OG = OA − AG = 3 OC − 2 OA = Logarithmo cubi = triplo Logarithmi lateris minus duplo Logarithmi unitatis. Eâdem ratione, quia AI = 4 AC = 4 OA − 4 OC, erit OI = 4 OC − 3 OA; qui eſt Logarithmus biquadrati. Et univerſaliter ſi fractionis poteſtas ſit n, Logarithmus L, erit Logarithmus poteſtatis $n = n$ L − n OA + OA; hoc eſt, multiplicando Logarithmum fractionis per n, et e producto abjiciendo Logarithmum unitatis multiplicatum per $n - 1$, habebitur Logarithmus poteſtatis n ejuſdem fractionis.

Ex. gr. ſit fractio $\frac{1}{20}$ =,05, cujus quæratur poteſtas 6[ta]; hujus fractionis Logarithmus eſt 8.6989700, qui mul-

multiplicatus per 6 dat numerum 52.1938200; et ex 52 ablato numero 50, qui eſt index Logarithmi unitatis in 5 ductus, reſtabit Logarithmus poteſtatis 6^{tae}, ſcil. 2.1938200, cui reſpondet numerus 0 00 0000 15625; nam index 2 oſtendit ſeptem cyphras primæ figuræ præponendas eſſe.

Si fractionis ,05 poteſtas octava deſideretur, multiplicando Logarithmum per 8, prodit 69.5917600: at cum ex numero 69 auferri non poteſt 70, qui eſt ſepties index Logarithmi unitatis, quin in numeros negativos deveniatur, pono indicem Logarithmi unitatis eſſe 100; et index Logarithmicus fractionis erit 98; hic Logarithmus in 8 ductus dat 789.5917600: et ex numero 789 rejecto numero 700, qui utpote cum cyphris annexis eſt ſepties Logarithmus unitatis, reſtabit 89.5917600 Logarithmus poteſtatis 8^{vae} fractionis $\frac{1}{20}$, cui congruens numerus eſt 00000 00000 39062; nam cum index ſit 89 et ejus differentia ab 100 eſt 11; figura prima fractionis ſignificativa erit in undecimo ab unitatis loco, adeoque decem cyphræ præponendæ erunt.

Si in fractionibus radices poteſtatum deſiderentur; v. gr. fractionis EF quæratur radix quadrata. Quoniam radix eſt media proportionalis inter fractionem et unitatem; biſectâ AE in C, erit CD radix quadrata fractionis EF. Eſt vero $AC = \frac{1}{2} AE = \frac{OA - OE}{2}$. Adeoque OC Logarithmus radicis $= OA - AC = \frac{OA + OE}{2}$. Si fractionis GH radix cubica quæratur; radix illa erit prima duarum mediarum proportionalium inter unitatem et GH. Secetur itaque AG in tres partes æquales, quarum prima ſit AC, erit CD radix quæſita. Et quoniam eſt $AC = \frac{1}{3} AG = \frac{OA - OG}{3}$; ſi hæc ſubducatur ab OA, reſtabit $\frac{2OA + OG}{3} = OC$ ſcil. Logarithmo radicis cubicæ fractionis GH. Sic etiam fractionis IK radix biquadratica habetur, ſecando AI in quatuor partes æquales. Nam radix eſt prima trium mediarum proportionalium inter unitatem et fractionem. Sit itaque $AC = \frac{1}{4} AI$, et erit CD radix biquadratica fractionis

nis I K. Sed eſt $\frac{1}{4}$ A I $= \frac{\text{OA} - \text{OI}}{4}$ adeoque O C = O A $- \text{AC} = \frac{3\,\text{OA} + \text{OI}}{4}$.

Univerſaliter ſi fractionis L M deſideretur radix poteſtatis n, ejus radicis Logarithmus erit $\frac{n\,\text{OA} - \text{OA} + \text{OL}}{n}$, hoc eſt, ſi indici Logarithmico fractionis præponatur numerus $n - 1$, et Logarithmus ſic auctus dividatur per n, quotus dabit Logarithmum radicis quæſitæ. Sic ſi quæratur radix cubica fractionis $\frac{1}{2}$ ſive ,5: hujus Logarithmo præponatur $2 = n - 1$, quia radix cubica deſideratur, et fiet 29.6989700 cujus numeri triens eſt 9.8996566 æqualis Logarithmo radicis cubicæ fractionis $\frac{1}{2}$, et congruens Logarithmo numerus eſt 7937 qui erit radix quæſita.

CAPUT IV.

De Regulâ Proportionis ſeu Aureâ Logarithmicâ.

DATIS tribus numeris, quâ ratione quartus proportionalis inveniendus ſit, nos docet proportionis regula; ſcil. termini ſecundus et tertius in ſe invicem ducendi ſunt, et productus dividendus eſt per primum. Qui prodit quotus, exhibebit quartum terminum proportionalem quæſitum. At per Logarithmos minore labore habebitur ille quartus; nam ſi e ſummâ Logarithmorum ſecundi et tertii auferatur Logarithmus primi, qui reſtat numerus eſt Logarithmus quarti proportionalis.

Quin etiam et hic labor minui aliquantulum poteſt, ſi loco Logarithmi primi capiatur ejus complementum Arithmeticum, ſeu differentia Logarithmi a numero 10 0000000; et obtinetur ſi pro ſingulis Logarithmi figuris ſcribantur earum differentiæ a 9; *complementum hoc arithmeticum cum reliquis duobus Logarithmis in

* Accuratius autem, ſi pro ſingulis Logarithmi figuris ante ultimam ſcribantur earum differentiæ a 9; pro ultimâ differentia ejus a 10.

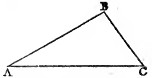
unam

unam summam conjiciatur, et e summâ unitatis nota, in primo versus sinistram loco sita, abjiciatur; restabit Logarithmus quarti termini quæsiti; atque hoc modo per unicam numerorum trium additionem invenitur Logarithmus termini quæsiti. Hujus rei causa hinc patebit. Sint tres numeri A, B, C, et e summâ secundi et tertii subducendus est primus, non tantum operatio communi modo perficitur, sed etiam si assumatur numerus quivis E, et ab eâ auferatur A, restabit E — A; si numeri B, C et E — A in unam summam addantur, et e summâ trium rejiciatur E, restabit B + C — A. Sic si subducendus est numerus 15 ex 23, capio nu-
85 meri 15 complementum ad 100 quod est 85,
23 hunc numerum addo ad 23, et summa fit 108, ex
108 quo sublato 100 restabit numerus 8.

Sequuntur Exempla Trigonometrica regulæ proportionis per Logarithmos soluta*.

* Hic autem, in Tyronum gratiam, pauca quædam haud abs re erit adnotasse de Tabulis Trigonometricis.

In Tabulis quas, a *Briggio* compositas, post ejus mortem *Henricus Gellibrand Londini* edidit, necnon in illis quas postea in compendium redactas, et meliori formâ dispositas *Sherwinus*, quasque nuperrime *Huttonus*, Logarithmis Sinuum, et Tangentium adjuncti sunt Sinus ipsi et Tangentes. Logarithmi autem Sinuum et Tangentium dicuntur Sinus et Tangentes Artificiales, ipsi vero Sinus et Tangentes Naturales vocantur; sicut *Keillius* ipse in præfatione suâ monuit. Radium autem Naturalem Tabularum Artifices partium 10000000000 posuerunt, quarum partium unaquæque Unitati æquanda est. Unde in systemate *Briggiano* enascitur artificialis 10.0000000. Illud autem hoc consilio factum; ut Sinus omnes naturales, et Tangentes arcuum dimidio quadrante minorum, quanquam radio necessario minores, essent tamen omnes vel Integrales Numeri, vel Mixti. Si enim pro radio unitas usurpata esset (quod certe simplicius fuisset, et reverâ in æquationibus concinnandis semper fieri solet) tam sinus omnes, quam tangentes arcuum dimidio quadrante minorum, puræ fractiones fuissent: majorum autem arcuum Tangentes numeri vel Integrales vel Mixti. Hinc autem evenisset numerorum Artificialium alios negativis indicibus gaudere, alios positivis. Et ex hâc Indicum diversitate metuendum erat, ne crebri errores Tabulas corrumperent. Radium igitur tot partium esse voluerunt, ut omnes Natu-



Sit triangulum A B C rectilineum, in quo dantur angulus A 36 gr. 46; angulus B 98 gr. 32′; et latus B C, 3478; et quæritur latus A C. Fiat (per caſ. 1. Trigon. Planæ) Sinus ang. A ad Sinum ang. B, ut B C ad A C. Et quia Log. ſinus anguli A eſt primus analogiæ terminus, ejus vice ſubſtituo complementum Arithmeticum ejuſdem, et addo Log. B C, Log. Sin. B, et prædictum complementum in unam ſummam, et e ſummâ rejectâ unitate, quæ eſt in primo verſus ſiniſtram loco, dabitur Logarithmus lateris A C, cui congruens numerus eſt 5746, 309 æqualis A C lateri quæſito.

Arith. comp. s. A.	0. 2228940
Log. Sin. B.	9. 9951654
Log. B C.	3. 5413296
Log. A C.	13. 7593890

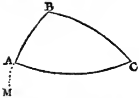
Sit triangulum Sphæricum A B C, in quo dantur omnia latera ſcil. B C = 30 grad. A B = 24 gr. 4′. et A C = 42 gr. 8′: quæritur angulus B. Producatur B A ad M, ut ſit B M = B C. Erit A M differentia laterum B C, B A æqualis 5 gr. 56′. Ut rectangulum ſub ſinubus

Naturales numeri vel Integrales vel Mixti emergerent, omnes autem Artificiales Indices poſitivos haberent.

Cæterum Sinus et Tangentes pro radio, qui unitati æqualis ſit, nullo negotio ex Tabularibus obtinentur facili diviſione per numerum 10000000000.

Sherwini autem Tabulæ, ut id obiter moneam, necnon *Huttonianæ*, præter ſinus et tangentes, ſecantes etiam et ſinus verſos habent artificiales naturalibus appoſitos. In illis autem quas medio fere ſæculo præterito *Gardnerus* edidit pro denis cujuſque gradûs ſcrupulis ſecundis, et in aliis, exeunte ſæculo a *Tayloro* compoſitis, pro ſingulis etiam ſcrupulis ſecundis: ad molem librorum minuendam omiſſi ſunt, præter ſinus verſos et ſecantes, numeri omnes Trigonometrici naturales, ſolique inveniuntur ſinus et tangentes artificiales. Ex quibus tamen omiſſi, tam naturales quam artificiales, facile, ſi opus ſit, derivantur.

cru-



crurum A B, B C ad quadratum radii, ita est rectangulum sub sinubus arcuum $\frac{AC+AM}{2}$, $\frac{AC-AM}{2}$ ad quadratum sinus anguli $\frac{1}{2}$ B.*

Est vero $\frac{AC+AM}{2} = 24$ gr. 2′. et $\frac{AC-AM}{2} = 18$ gr. 6′. Et quia primus analogiæ terminus est rectangulum sub sinubus A B, B C, et secundus terminus est quadratum radii; summa Log. Sin. A B, B C subducenda erit ex duplo Log. radii, et qui restat numerus addendus est ad summam Log. Sin. $\frac{AC+AM}{2}$, $\frac{AC-AM}{2}$. Quod idem erit ac si singuli Log. Sinus arcuum A B, B C subducerentur a Logarith. radii, vel si horum sinuum capiantur complementa Arithmetica, atque complementa illa et prædicti sinus in unam conjicerentur summam.

Log. s, B C comp. Arith.	0.3010300
Log. s, A B comp. Arith.	0.3895535
Log. s, $\frac{AC+AM}{2}$	9.6098803
Log. s, $\frac{AC-AM}{2}$	9.4923083
2 Log. s, Ang. B.	19.7927721

Summa illa erit Logarithmus quadrati sinus dimidii anguli B. Logarithmi itaque dimidium, 9.8963860, est Log. Sinus anguli $\frac{1}{2}$ B = 51 gr. 58′. 31″: et hujus anguli duplum erit 103 gr. 57′. 02″ = angulo B, qui erat inveniendus.

CAPUT V.

De Proportionalium Quantitatum continuis Incrementis, et de modo inveniendi per Logarithmos, Terminum quemlibet in serie Proportionalium, sive crescente, sive decrescente.

Vide Fig. 3. SI in Axe Logarithmicæ ubivis capiantur partes quot volueris S V, V Y, Y Q, &c. æquales, et ad puncta S, V,

* Vide Appendicem nostrum.

Y, Q,

Y, Q, &c. erigantur perpendiculares S T, V X, Y Z, Q Π, &c. ex naturâ curvæ, erunt omnes continue proportionales; quinetiam continua incrementa X x, Z z, Π π erunt totis proportionalia. Nam ob S T : V X : : V X : Y Z : : Y Z : Q Π, erit dividendo S T : X x : : V X : Z z : : Y Z : Π π, et componendo V X : X x : : Y Z : Z z : : Q Π : Π π. Hinc si X x sit pars quælibet rectæ S T, erit Z z eadem pars rectæ V X, et Π π quoque eadem pars rectæ Y Z. Ex gr. si X x sit $\frac{1}{10}$ S T, erit Z z = $\frac{1}{10}$ V X, et Π π = $\frac{1}{10}$ Y Z; seu quod eodem redit, erit V X = S T + $\frac{1}{10}$ S T; Y Z = V X + $\frac{1}{10}$ V X; item Q Π = Y Z + $\frac{1}{10}$ Y Z.

Fiat ut S T ad V X, ita A B unitas ad N R; erit A N = S V; adeoque rectæ S V, V Y, Y Q &c. erunt singulæ æquales Logarithmo ipsius R N, et A V Logarithmus termini V X erit æqualis A S + A N = Logarithmo ipsius S T + Logarithmo ipsius N R. Item A Y Logarithmus termini Y Z æqualis erit A S + 2 A N = Log. S T + 2 Log. N R, et A Q Logarithmus termini Q Π æqualis erit A S + 3 A N = Log. S T + 3 Log. N R. Et universaliter, si Logarithmus numeri N R multiplicetur per numerum, qui exprimit termini cujusvis distantiam a termino primo, et productus addatur Logarithmo termini primi, dabitur Logarithmus istius termini. At si series proportionalium sit decrescens; seu si termini in continuâ ratione minuantur, et Q Π sit primus, habebitur Logarithmus alterius cujusvis termini, multiplicando Logarithmum numeri N R per numerum, qui exponit ejus termini distantiam a primo, et subducendo productum e Logarithmo primi. Quod si productus ille sit major Logarithmo primi termini, initio ab unitate ducto; in eo casu ponendi sunt Logarithmi incipere ab unitate in aliquo fractionum Decimalium loco detrusâ, verbi gratiâ ab O P, ita Logarithmus numeri Q Π erit O Q.

Exponat jam L M quamvis pecuniam, seu pecuniæ summam a creditore fœnori elocatam, eâ lege ut singulis annis usura annua sorti annumeretur, et finito primo anno, sit usura, seu lucrum, K k, et I K aggregatum sortis et lucri pariat usuram H b, quæ sit ipsi I K proportionalis, seu in ratione constanti. Hæc usura H b, finito anno secundo, sorti accedat, et sors ea fit G H, quæ ad finem anni tertii pariat usuram F f, ipsi G H proportionalem. Ponamus sortem singulis annis augeri

L parte

parte sui vicesimâ, $\frac{1}{20}$, adeoque erit IK = LM + $\frac{1}{20}$ LM; GH = IK + $\frac{1}{20}$ IK; EF = GH + $\frac{1}{20}$ GH, et ita deinceps. Erunt proinde termini LM, IK, GH, EF &c. continue proportionales. Quæritur quantum aucta fuerit pecunia ad finem quotlibet annorum.

Sit LM semiobolus, Anglice *a farthing*. Ob LM ad IK, ut 1 ad 1 + $\frac{1}{20}$, vel ut 1 ad 1,05, ut AB ad NR, erit NR = 1,05, cujus Logarithmus AN est 0.0211893, vel magis accurate 0.021189299I. Quæritur quantum lucri accedat semiobolo, qui sexcentis annis fœnori expositus est. Multiplicetur AN per 600, productus erit 12.7135794. Huic producto addatur Logarithmus fractionis $\frac{1}{960}$ nempe 97.0177288. (nam est semiobolus pars libræ $\frac{1}{960}$) summa 109.7313082 erit Logarithmus numeri quæsiti, cumque index 109 superat indicem unitatis novenario, seu 9, erunt in numero respondente novem figurarum loca supra locum unitatum, et numerus ille in tabulis quæsitus invenietur major quam 5386500000, et minor quam 5386600000. Unus itaque semiobolus fœnori datus, finitis sexcentis annis, pariet libras Anglicanas plures quam 5386500000; cui summæ solvendæ vix par erit omnis illa Auri Argentique copia, quæ ab ipsâ rerum origine ad hunc usque diem ex terrarum visceribus eruta est.

Exponat QΠ quamvis pecuniæ summam, quam post exactum integrum annum debitor creditori solvere tenetur, sed sine usurâ. Certum est si debitor nunc totam solveret, illum amissurum jus quod habet in usuram annuam quæ ex pecuniâ illâ prodiret; quin et minor summa, fœnori exposita, potest post annum cum suâ usurâ summam QΠ adæquare. Minor illa pecuniæ summa, quæ cum suâ usurâ pecuniam QΠ adæquat, præsens pecuniæ QΠ valor dicitur. Sit AN Logarithmus rationis, quam sors habet ad aggregatum sortis et usuræ, hoc est, si sors sit usuræ annuæ vigecupla, sit AN Logarithmus numeri 1 + $\frac{1}{20}$ seu 1,05, et capiatur QY æqualis AN; erit AY Logarithmus præsentis valoris pecuniæ QΠ. Patet enim pecuniam YZ, fœnori expositam, finito anno parituram pecuniam QΠ; adeoque ut habeatur Logarithmus præsentis valoris, seu YZ, ex Logarithmo AQ detrahi debet Logarithmus AN, et restabit AY Logarithmus præsentis valoris, vel YZ. Si summa QΠ non nisi post duos annos exactos debea-

debeatur, a Logarithmo A Q fubtrahendus eft numerus 2 A N, et manebit A V Logarithmus præfentis valoris, feu fummæ, quæ pro pecuniâ Q Π folvi ftatim debeat. Nam manifeftum eft pecuniam V X, fœnori expofitam, fpatio duorum annorum pecuniam Q Π procreaturam. Eâdem ratione, fi fumma Q Π non nifi poft tres annos debetur, a Logarithmo Q Π fubtrahendus erit numerus 3 A N, et qui reftat A S erit Logarithmus numeri S T, feu erit S T præfens valor fummæ Q Π poft tres annos folvendæ. Et univerfaliter, fi Logarithmus A N multiplicetur per numerum annorum, quibus exactis debetur fumma Q Π, et productus numerus ex Logarithmo A Q fubducatur, hâc ratione dabitur Logarithmus numeri, qui erit præfens valor fummæ Q Π. Hinc patet, fi 5386500000 libræ Angl. focietati alicui, finitis fexcentis annis, folvendæ fuerint, tantæ pecuniæ præfentem valorem vix unum femiobolum adæquaturum *.

* Subtiliter fane hæc, et eleganter admodum, a *Keillio* enarrata funt. Sed in doctrinâ hâc de Anatocifmis declarandâ fine neceffitate, pœne dixerim importune, Curva Logarithmica adhibetur. Calculi certe pecuniarum, ex ufuris cum anatocifmo datis temporibus provenientium, Logarithmorum compendio optime fubducendi, cum aliter fint plane intractabiles. Neque alibi quam in hâc materiâ magis elucefcit Arithmetices Logarithmicæ vis atque præftantia. Sed principia, in quibus calculi fundantur, ea quidem ex merâ Geometriâ elementari petenda funt, fine ullâ vel Logarithmicæ vel Logarithmorum etiam confideratione. Hoc autem in Tyronum gratiam plenius edifferam.

Puta igitur certam aliquam pecuniæ fortem fœnori elocatam effe; eâ conditione, ut fi debitor, exacto anno, fortem acceptam cum ufurâ ejufdem fœneratori non reddat, ufura forti addita novam fortem conficiat alterius anni, fimili conditione debitori omnino retinendam. Si igitur biennio exacto debitor cum fœneratore non decidat, auctæ fortis ufura eidem apponenda eft, quæ tertii anni fortem conficiat, conditione adhuc fimili debitori retinendam. Quod fi hoc pluribus annis fiat, incrementum fortis primariæ ufura eft cum anatocifmo. Cujufmodi fane ufuræ, quanquam apud nos legibus vetitæ funt, ne fœneratorum avaritiæ prædæ fint, qui vel fuo, vel fortunæ forte, vitio decoxerunt; multa tamen funt in hominum commerciis, in quibus earum habenda eft ratio. Unde variæ enafcuntur quæftio-

Fig. 4. Si in axe Logarithmicæ ordinentur ad curvam rectæ HG, EF, AB, CD, quæ ſint proportionales, et extremi-

nes homini Arithmetico enucleandæ. Quarum tamen quinque ſunt uſûs præcipui.

Prima eſt, In quantam pecuniæ ſummam compluribus annis per anatociſmum ſors primaria creverit? Dato ſcilicet annorum numero, datâque uſuræ ratione ſimplici.

Secunda, Quantâ pecuniâ, ſtatim numerandâ, redimatur futura quælibet penſio? Dato ſcilicet annorum numero ad tempus uſque futuræ penſionis, datâque ut prius uſuræ ratione ſimplici.

Tertia, Si certæ pecuniæ penſiones annuæ per plures annos neglectæ fuerint, dato annorum numero, et uſuræ ratione ſimplici, quantâ ſummâ ſatisfaciendum ſit ei, cui penſiones erant ſolvendæ?

Quarta, Quantâ ſummâ ſtatim numerandâ emantur penſiones annuæ pecuniæ certæ, in plures annos ſolvendæ, dato annorum numero cum uſuræ ratione ſimplici?

Quinta, Quantâ ſummâ ſtatim numerandâ emantur penſiones annuæ pecuniæ certæ in plures annos, quæ dato tempore futuro initium ſumant?

Ad harum quinque quæſtionum explicationem ſors primaria in quæſtione primâ, et penſio quæque in quatuor reliquis, ponatur 1. Uſura annua centum librarum Anglicarum ſignificetur literâ R. Capiatur A, ad quam 1 rationem eam habeat, quam 100 ad $100 + R$. Jam cum ſors quælibet pecuniæ ad uſuram annuam eandem rationem habeat, quam 100 ad R, ſors quælibet ad ſortem, uſurâ unius anni auctam, rationem habet, quam 100 ad $100 + R$. Sors igitur primaria 1, exacto anno primo, in A creverit. Pari ratione A, anno exacto, in A^2 creverit. Et A^2 exacto anno in A^3.

Expoſitâ igitur ſerie geometricâ

$$1.\ A.\ A^2.\ A^3.\ A^4.\ \&c.\ \ A^n.$$

Sors primaria anno primo exacto in A creverit, anno ſecundo in A^2, anno tertio in A^3, &c. Denique tot annis quot ſunt in numero n unitates, in ipſam A^n. Et hæc eſt reſolutio quæſtionis primæ.

Datâ igitur A, per Logarithmos invenienda eſt A^n. multiplicando ſcilicet Logarithmum ipſius A cum numero n.

Ex. Ponatur $R = 5l$. Ut uſura ſimplex annua ſit viceſimæ. Ponatur autem $n = 600$. Cum uſura ſit viceſimæ, erit $A = 1{,}05$. Hujus Logarithmus ex tabulis vulgaribus eſt 0.0211893.

Sed

tates ipſarum F, H, D, B rectis jungantur, quæ productæ cum axe conveniant in P et K, erunt rectæ G P, A K ſemper æquales. Nam ob G H : E F : : A B : C D, erit

Sed ex Vlacquianis 0. 0211892991
600

Hic centum ſenariis multiplicatus fit 12. 7135794600
Qui Logarithmus eſt A^n ſive A^{600}. Unde A^{600} in Tabulis invenietur 5171058400000. Semiobolus igitur unus ſexcentis annis in hanc ſummam ſemiobolorum creverit. Sive in Libras Anglicanas 5386519166. Nam ſumma ſemiobolorum ad Libras revocatur dividendo per numerum 960. Huic autem ſummæ ſolvendæ vix ſufficeret moles Auri cubica, cujus latus pedes Londinenſes 46 longitudine æquaret.

Rurſum exponatur ſeries Geometrica reciprocorum ejus, quæ modo expoſita eſt, viz.

$$1,\ \frac{1}{A},\ \frac{1}{A^2},\ \frac{1}{A^3},\ \frac{1}{A^4},\ \&c.\ \ \frac{1}{A^n}.$$

Jam cum $\frac{1}{A}$ ſit ad 1, ut 1 ad A, cum ſors pecuniæ 1 exacto anno in A creſcat, $\frac{1}{A}$ exacto anno in 1 creverit. Et cum $\frac{1}{A^2}$ ſit ad 1, ut 1 ad A^2, cum ſors pecuniæ 1 biennio in A^2 creſcat, $\frac{1}{A^2}$ biennio in 1 creverit. Simili ratione $\frac{1}{A^3}$ triennio, $\frac{1}{A^4}$ quadriennio, denique poſt tot annos quot ſunt in numero n unitates, $\frac{1}{A^n}$ in 1 creverit. Penſio igitur, poſt annos n futura, ſi unitate ſignificetur, ea pecuniâ ſtatim numerandâ redimatur, quam $\frac{1}{A^n}$ ſignificat. Et hæc eſt reſolutio ſecundæ quæſtionis.

Datâ ſcilicet A, dabitur $\frac{1}{A}$. Per Logarithmos igitur invenienda eſt $\frac{1}{A^n}$, multiplicando ſcilicet Logarithmum fractionis $\frac{1}{A}$ numero n.

Fig. 4. GH . FS :: AB : DR. Sed ob æquiangula triangula PGH, HSF, item KAB, BRD æquiangula, erit PG : HS :: (GH : FS :: AB : DR ::) KA : BR. Quarum

Ex. Sit uſura ſimplex annua viceſimæ. Erit igitur $\frac{1}{A} =$ $\frac{100}{105}$. Cujus Logarithmus eſt $\overline{1}.9788107$

Ponatur $n = 10$ 10

Logarithmus igitur $\frac{1}{A^n}$ ſive $\frac{1}{A^{10}}$ erit $\overline{1}.7881070$

Unde $\frac{1}{A^{10}}$ in Tabulis invenietur   0, 6139133

Et hâc ſui parte ſtatim numeratâ redimatur penſio futura poſt decennium. Ut ſi penſio futura mille Librarum eſſet Anglicarum (1000*l*) pretium ejus redimendæ ſit £613, 9133 ſive £613..18..3,19.

Si penſiones annuæ certæ pecuniæ, unitate ſcilicet ſignificatæ, per tot annos neglectæ fuerint quot ſunt in numero *n* unitates, manifeſtum eſt ei, cui erant ſolvendæ, haud aliter quam ſummâ totius ſeriei 1, A, A^2, A^3, A^4 &c. A^{n-1} ſatisfaciendum eſſe; ſive ſummâ antecedentium ſeriei 1, A, A^2, A^3, A^4 &c. A^{n-1}. A^n. Poſitâ autem ſummâ illâ antecedentium S, erit $A - 1 : 1 =$
* 35. noni. $A^n - 1 : S$. Erit igitur $S = \frac{A^n - 1}{A - 1}$. Hâc igitur ſummâ ſatisfaciendum pro penſionibus neglectis. Et hæc eſt reſolutio tertiæ quæſtionis.

Ex. Poſitâ ut prius uſurâ viceſimæ, erit $A = 1,05$ et Logarithmus ejus   0. 0211893

Ponatur *n* numerus annorum = 10   10

Erit igitur Logarithmus numeri A^n 0. 2118930

Unde A^n in Tabulis invenietur 1, 628894.

Quare $A^n - 1 = 0, 628894$.

Sed $A - 1 = 0,05$. Quare $\frac{A^n - 1}{A - 1} = 12, 57788$.

Hinc ſi ſingulæ penſiones annuæ 15 Librarum fuerunt (15*l*) pro decies neglectis, vel, ut accuratius loquamur, pro novem neglectis cum decimâ, anno decimo exacto, ſummâ Librarum 12, 57788 × 15 = 188*l* 13*s* 9, 17*d* ſatisfaciendum erit.

Si penſiones annuæ pecuniæ certæ, unitate ut prius deſignatæ, in tot annos ſolvendæ quot ſunt in numero *n* unitates, pecuniâ ſtatim numerandâ emendæ ſint, manifeſtum eſt pretium ſummæ

proportionalium confequentes H S, B R æquales funt, antecedentes igitur P G, K A æquales erunt. *Q. E. D.*

[*Vel brevius hoc modo. Propter parallelas*, C D, A B, *erit*

fummæ feriei $\frac{1}{A}, \frac{1}{A^2}, \frac{1}{A^3}, \frac{1}{A^4}$, &c. $\frac{1}{A^n}$ æquandum effe, five fummæ confequentium hujus feriei $1, \frac{1}{A}, \frac{1}{A^2}, \frac{1}{A^3}, \frac{1}{A^4}$, &c. $\frac{1}{A^n}$. Quæ eft feries proportione convenientium, quarum minima $\frac{1}{A^n}$, maxima 1, proximarum autem communis ratio ea, quam A habet ad 1. Pofitâ igitur fummâ confequentium s, erit

$A - 1 : 1 = 1 - \frac{1}{A^n} : s$[b]. Erit igitur $s = \frac{1 - \frac{1}{A^n}}{A - 1}$. Hoc igi-[b] 35. noni.

tur pretio emendæ funt penfiones annuæ in annos n folvendæ, et hæc eft refolutio quartæ quæftionis.

Ex. Pofitâ ut prius ufurâ vicefimæ, ut A fit $= 1{,}05$, $A - 1 = 0{,}05$, ponatur numerus $n = 10$. Veniet igitur pro Logarithmo $\frac{1}{A^n}$, ut fupra, $\bar{1}.7881070$. Unde invenietur $\frac{1}{A^n} = 0{,}6139133$. Quare $1 - \frac{1}{A^n} = 0{,}3860867$. Et $\frac{1 - \frac{1}{A^n}}{A - 1} = 7{,}72175$. Et hoc pretio comparandæ funt penfiones annuæ per decennium, quarum fingulæ fint 1. Quare fi fingulæ fint centum Librarum (100*l*) pretium erit Librarum 772, 175 five 772*l* 3*s* 6*d*.

Quod fi penfiones annuæ per tot annos folvendæ quot funt in numero n unitates, fed quæ poft annos incipiant quot funt in numero m unitates, pecuniâ paratâ fint emendæ, manifeftum eft pretium fummæ hujus feriei æquandum effe

$$\frac{1}{A^{m+1}}, \frac{1}{A^{m+2}}, \frac{1}{A^{m+3}}, \frac{1}{A^{m+4}} \text{ \&c. } \frac{1}{A^{m+n}}.$$

five fummæ confequentium in hâc ferie

$$\frac{1}{A^{m}}, \frac{1}{A^{m+1}}, \frac{1}{A^{m+2}} \text{ \&c. } \frac{1}{A^{m+n}}.$$

Hæc autem eft feries proportione convenientium (pro ratione communi A ad 1) quarum minima eft $\frac{1}{A^{m+n}}$, maxima $\frac{1}{A^m}$.

 Pofitâ

CK : KA = CD : AB = EF : GH. *Et propter parallelas* EF, GH, *erit* EP : PG = EF : GH. *Quare* CK : KA =

Positâ igitur consequentium summâ = s, erit $A - 1 : 1 = \frac{1}{A^m} - \frac{1}{A^{m+n}} : s$.

$$\text{Quare } s = \frac{\frac{1}{A^m} - \frac{1}{A^{m+n}}}{A - 1} = \frac{100}{R} \times \overline{\frac{1}{A^m} - \frac{1}{A^{m+n}}}$$ (nimirum cum $A - 1 = \frac{R}{100}$). Hoc pretio emendæ sunt pensiones annuæ, quarum singulæ sunt 1, per annos n post annos m solvendæ. Et hæc est resolutio quintæ quæstionis.

Eximius est autem hujus formulæ usus in pecuniarum æstimatione, quæ Domino Fundi, in tempus præfinitum sub pensiunculâ locati, solvendæ sunt, si, post annos aliquot elapsos, conductor syngraphas locationis renovari petat, ut anni præteriti sibi restituantur. Proventus enim annuus, qui ex Fundo conductori redit, ultra pensiunculam Domino reservatam, significetur literâ P. Tempus totum locationis sit annorum numero T. Anni elapsi numero sint n: et sit $m = T - n$. Pecuniarum summa, mulctæ nomine Domino solvenda pro syngraphis renovatis, erit $P \times \frac{100}{R} \times \overline{\frac{1}{A^m} - \frac{1}{A^{m+n}}}$. Proventus enim annuus P tanquam pensio est annua, quam in annos n post annos m conductor Fundi pecuniâ paratâ sibi emit a Domino.

Illud autem animadvertendum; in pactionibus hujusmodi conficiendis propter graves, uti aiunt, impensas conductori subeundas, in ædificiis sustinendis, censibus deferendis, aliisque, usuræ grandiores usurpari solent quam pro ratione vicesimæ.

Ex. Simplices igitur usuræ sint bis vicesimæ quintæ ($\frac{2}{25}$) ut sit R = 8. Erit igitur A = 1,08. Sit tempus totum locationis T annorum 21. Anni autem jam elapsi sint numero 7. Ut sit $n = 7$. Erit igitur $m = 14$, et $n + m = 21$.

Jam cum A sit 1,08, ejus Logarithmus erit	0.0334238
Logarithmus igitur fractionis $\frac{1}{A^m}$ erit	$\bar{1}$.5320668
Et Logarithmus fractionis $\frac{1}{A^{m+n}}$ erit	$\bar{1}$.2981002
Unde in tabulis invenietur $\frac{1}{A^m}$ =	0,34046

Et

E P : P G. *Et dividendo* C A : A K = E G : G P. *Æquales autem* A C, G E. *Quare æquales etiam* A K, G P. *Q. E. D.*]

Si rectæ C D, E F ad A B, G H æqualiter accedant, ut tandem punctum D coincidat cum B, et punctum F cum H; rectæ D B K, F H P, quæ prius fecabant curvam, vertentur in tangentes B T, H V; et rectæ A T, G V femper fibi invicem æquales erunt, hoc eft, portio axis A T vel G V intercepta inter ordinatam et tangentem quæ fubtangens dicitur, erit ubique conftantis et datæ longitudinis; quæ eft præcipua Logarithmicæ proprietas. Nam in diverfis Logarithmicis, fubtangentes curvarum fpecies feu formas determinabunt.

In duabus diverfæ fpeciei Logarithmicis, ejufdem numeri Logarithmi, feu diftantiæ ab unitate, erunt fubtangentibus fuarum curvarum proportionales. Sint enim curvæ H B D, S N Y, quarum fubtangentes fint A T, M X, fitque A B = M N = unitati, item D C = Q Y; Fig. 4. et 5. erit A C Logarithmus numeri C D, in Logarithmicâ H D, ad M Q Logarithmum numeri Q Y, feu ejufdem C D in Logarithmicâ S Y, ut fubtangens A T ad fubtangentem M X. Concipiatur interferi inter A B, C D vel M N, Q Y, infinitos terminos continue proportionales, in ratione A B ad *a b* vel M N ad *m n*; et ob A B = M N erit *a b* = *m n*: item erit *b c* = *n o*. Et termini proportionales, cum in utrâque figurâ fint numero æquales, divident lineas A C, M Q in partes numero æquales, quarum primæ fint A *a*, M *m*. Partes itaque illæ erunt totis proportionales, hoc eft, erit A *a* : M *m* : : A C : M Q. Quoniam autem triangula T A B, B *c b* funt fimilia (nam pars curvæ B *b* coincidet fere cum portione tangentis) item triangula X M N, N *o n* funt fimilia. Erit A *a* vel B *c* : *b c* : : T A : A B.

Item eft *n o* vel *b c* : N O : : M N vel A B : M X.

$$\text{Et } \frac{1}{A^{m+n}} = \quad 0,19865$$

$$\text{Quare } \frac{1}{A^{m}} - \frac{1}{A^{m+n}} = \quad 0,14181$$

$$\text{Et } \frac{100}{R} \times \overline{\frac{1}{A^{m}} - \frac{1}{A^{m+n}}} = \quad 1,7726$$

Hinc fi P fit librarum quingentarum (500*l*) fumma mulctæ nomine Domino folvenda, erit librarum 886,3 five 886*l* 6*s* 0.

Unde

Unde erit ex æquo, B c : N o : : T A : M X : : A a : M m : : A C : M Q. *Q. E. D.*

Si A T vocetur a, ob A B : A T : : bc : B c; erit B c $= \frac{a \times bc}{AB}$.

Hinc si detur Logarithmus numeri, qui sit unitati proximus, vel illam minimo excessu superat, dabitur Logarithmicæ subtangens, est enim excessus bc ad Logarithmum B c ut A B unitas ad subtangentem A T. Vel etiam si sint duo quilibet numeri quam proxime æquales, erit differentia numerorum ad differentiam Logarithmorum, ut alteruter numerorum ad subtangentem: v. gr. si incrementum bc sit ,00000 00000 ,00001 02255 31945 60259, et B c vel A a Logarithmus numeri ab sit ,00000 00000 00000 44408 92098 50062: duobus his numeris et unitati inveniatur quartus proportionalis, scilicet 43429 44819 03251, is numerus dabit longitudinem subtangentis A T, quæ est subtangens Logarithmicæ quæ exhibet Logarithmos *Briggianos*.

Si Creditor pecuniæ summam fœnori exponat, ea lege, ut singulis temporis momentis, pars proportionalis usuræ annuæ sorti annumeretur, ita scil. ut post finitum primum temporis momentum, seu exactam anni particulam indefinite exiguam, usuram poscat tempori proportionalem, quæ sorti adjecta, unà cum ipsâ, usuram pariat, finito secundo temporis momento, sorti pariter accessuram, et ita deinceps: quæritur quantum creditori finito anno debeatur? Sit a usura annua unitatis, seu unius libræ. Et si integer annus seu 1 dat usuram a, particula anni indefinite exigua M m dabit usuram ipsi M m proportionalem M $m \times a$; et proinde si unitas per M N exponatur, ejus incrementum primum erit $no =$ M $m \times a$. Per puncta N, n concipiatur Logarithmica describi, cujus axis est O M Q. In hâc curvâ, si portio axis M Q tempus exponat, ordinata Q Y pecuniam repræsentabit quæ usque ad illud tempus, singulis momentis, proportionaliter crevit. Nam si capiantur ml &c. $=$ M m, ordinatæ lp &c. erunt in serie continue proportionalium in ratione M N ad mn, id est, crescent eâdem ratione, quâ pecunia crescit.

Tangat Logarithmicam in N recta N X, ejus subtangens M X erit constans et invariabilis, et triangulum mini-

minimum N o n fimile erit triangulo X M N. At oftenfum eft, effe incrementum $no = \text{M}m \times a = \text{N}o \times a$. Erit itaque $no : \text{N}o :: \text{N}o \times a : \text{N}o :: a : 1$. Sed ut no ad N o, ita erit N M ad M X. Quare erit, ut a ad 1, ita N M feu 1 ad $\text{M X} = \frac{1}{a}$ fubtangenti.

Quod fi ufura annua fit pars fortis vicefima, feu fi fit $a = \frac{1}{20} = ,05$, erit $\text{M X} = \frac{1}{a} = 20$.

Quia in diverfis Logarithmorum formis, ejufdem numeri Logarithmi funt fubtangentibus fuarum curvarum proportionales: fi M Q tempus annuum, feu unitatem, exponat; Q Y erit pecunia, quæ finito anno debetur. Ut vero innotefcat Q Y, fiat ut M X, feu 20, ad 0,4342944 (qui numerus exponit fubtangentem Logarithmicæ, quæ exhibet Logarithmos *Briggianos*) ita annus, five unitas, ad Logarithmum *Briggianum*, qui numero Q Y congruit. Logarithmus autem ille invenietur 0.0217147, cui refpondens numerus = Q Y eft 1 ,05127, cujus incrementum fupra unitatem five fortem ,05127, pauxillum fuperat annuam ufuram ,05. Adeo ut fi ufura annua centum librarum fit quinque libræ, ufura proportionalis fingulis anni momentis forti 100 adjecta, pariet tantum ad finem anni, *5l 2s 6½d* *.

* Si quid hâc in re paradoxum fit, quod calculorum etiam fidem fufpectam reddat, illud omne exempla difcutient.

Puta igitur certam aliquam pecuniarum fummam eâ conditione fœnori elocatam, ut non annis fingulis exactis, fed fingulis fpatiis trimeftribus, ufuræ forti accedant. Et in ferie 1, A, A^2, A^3 &c. litera A fignificet numerum illum mixtum ad quem unitas rationem habet, quam 100 ad $100 + r$, defignante r ufuram centum librarum non annuam fed trimeftrem. Sors igitur primaria 1, fpatio trimeftri primo in A creverit; fecundo igitur in A^2; tertio in A^3; quarto denique, five anno integro in A^4.

Jam fi ufura annua fit vicefimæ, ufura trimeftris partis 4tæ erit vicefimæ feu $\frac{1}{80}$. Hinc $\text{A} = 1,0125$. Et $\text{A}^4 = 1,050945$. Anno igitur integro fors primaria 100*l* ex ufuris trimeftribus in 105,0945 creverit. Ufuræ igitur fortis augmentum effecerint £5,0945, feu *5l 1s 10¼d* quam proxime.

Puta jam pecuniam eâ lege elocatam, ut menfibus fingulis ufuræ forti accedant; pofitis fcilicet menfibus non civilibus fed inter

Si quæratur ufura ejufmodi, ut, fingulis momentis, pars ipfius forti continue crefcenti proportionalis ad

inter fe æqualibus, quorum unufquifque pars duodecima fit anni Ægyptii, hoc eft, dierum unufquifque 30 cum horis 10.

In ferie 1, A, A^2, A^3 &c. litera A fignificet mixtum illum, ad quem unitas rationem habeat, quam 100 ad 100 + r, defignante jam literâ r menftruam centum librarum ufuram. Anno igitur integro fors primaria 1 in A^{12} creverit. Positâ autem ufurâ annuâ vicefimæ, ufura menftrua partis erit duodecimæ vicefimæ, five $\frac{1}{240}$. Hinc A = 1,0041666' feu 1,0041$\frac{2}{3}$ et A^{12} = 1,051162. Sors igitur primaria 100l anno integro ex ufuris menftruis in £105, 1162 creverit. Et ufuræ fortis augmentum effecerint £5, 1162, feu 5l 2s 3$\frac{3}{4}d$ quam proxime.

Sed ufura diebus fingulis forti accedat. Sors igitur primaria 1 anno integro in A^{365} creverit. Positâ autem ufurâ annuâ vicefimæ, diurna partis 365^{æ} vicefimæ erit, five $\frac{1}{7300}$. Hinc A = 1,0001369863'01369863 = $\frac{7301}{7300}$. Hujus autem Logarithmus eft

$$
\begin{array}{r}
0.0000594883 \\
563 \\
\hline
1784649 \\
356929 \\
29744 \\
\hline
\end{array}
$$

Logarithmus igitur ipfius A^{365} eft 0.02171322

In tabulis igitur invenietur A^{365} = 1,051267.

Sors igitur primaria centum librarum anno integro dierum 365 ex ufuris diurnis in £105,1267 creverit. Et augmentum ex ufuris confectum erit £5,1267 five 5l 2s 6$\frac{1}{4}d$ quam proxime.

Univerfe, fi eam fingamus locationis legem, ut fingulis anni particulis, quarum unaquæque ad annum totum eam rationem habeat, quam unitas ad numerum quendam integralem n, ufuræ fortibus accedant; tum fi litera A fignificet fummam fortis primariæ, unitate defignandæ, cum ufurâ fuâ fimplici pro primâ anni particulâ conjunctæ, anno integro fors primaria in A^n creverit. Jam litera ϱ fignificet ufuram annuam fimplicem fortis primariæ unitate defignatæ. Erit igitur $A = 1 + \frac{1}{n}\varrho$. Et A^n, five fumma, in quam fors unitate defignata anno integro creverit, hifce notis defignanda erit $\overline{1 + \frac{1}{n}\varrho}|^n$. Quantufcunque autem fit numerus n, fi ρ fractio fit exigua, quantitas $\overline{1 + \frac{1}{n}\varrho}|^n$ quantitatem $1 + \rho$ exiguo admodum exfuperabit.

fortem

fortem accedat, eâ lege, ut finito anno producat incrementum quod fit fortis pars quælibet data, v. gr. vicesima: fiat ut Log. numeri 1,05 ad 1, hoc est, ut 0,0211893 ad 1; ita subtangens 0,4342944 ad $\frac{1}{a}$ = 20,49, et erit $a = \frac{1}{20,49}$ = ,0488. Nam si concipiatur pars usuræ ,0488 momento respondens, hoc est, eandem habens rationem ad ,0488 quam habet momentum ad annum, et fiat ut unitas ad illam usuræ partem, ita sors ad ejus incrementum momentaneum: quæ hâc ratione continuo crescit pecunia, ad finem anni augebitur vicesimâ sui parte.

CAPUT VI.

De Methodo quâ Henricus Briggius Logarithmos suos supputavit, ejusque Demonstratio.

QUAMVIS *Briggius* lineam Logarithmicam nusquam descripsit, quem tamen in calculo adhibuit operandi modum, modique rationem, ex contemplatione Logarithmicæ evidentissime patebit. In quâlibet Logarithmicâ HBD sint tres ordinatæ, AB, *ab*, *qs*, quam proxime æquales; hoc est, earum differentiæ exiguam admodum ad ipsas lineas habeant rationem: erunt Logarithmorum differentiæ differentiis linearum proportionales. Nam cum lineæ sunt quam proxime æquales, propinquissimæ sibi invicem erunt, et pars curvæ B *s* ab iis intercepta cum rectâ lineâ fere coincidet; certe tam prope possunt ordinatæ sibi invicem admoveri, ut differentia curvæ a rectâ ipsam subtendente, habeat ad ipsam subtensam, minorem quâlibet datâ rationem. Triangula igitur B *c b*, B *r s* pro rectilineis assumi possunt, et erunt æquiangula. Quare est *s r* : *b c* : : B *r* : B *c* : : A *q* : A *a*: hoc est, excessus linearum supra minimam A B, erunt Logarithmorum differentiis proportionales. Hinc patet ratio istius methodi, quâ tam numeri quam Logarithmi per differentias et partes proportionales corriguntur. Quod si A B sit unitas, erunt numerorum Logarithmi differentiis numerorum proportionales.

Vide Fig. 4.

Si

Si intra numeros, denarium et unitatem, capiatur medius proportionalis, ſeu quod idem eſt, numeri denarii extrahatur radix quadratica, radix illa ſeu numerus in medio erit loco intra denarium et unitatem: et ejus Logarithmus erit dimidius Logarithmi, qui denario competit, ac proinde dabitur. Si inter numerum prius inventum et unitatem iterum inveniatur medius proportionalis, quod fit extrahendo numeri inventi radicem quadraticam; hic numerus unitati duplo vicinior erit quam prior, ejuſque Logarithmus erit prioris Logarithmi ſemiſſis, ſeu Logarithmi denario competentis pars quarta. Si hâc ratione continuo extrahatur radix quadratica, et biſecentur Logarithmi, pervenietur tandem ad numerum, cujus diſtantia ab unitate minor erit parte $\frac{1}{1\,00000\,00000\,00000}$ iſtius Logarithmi, qui denario tribuitur. *Briggius*, peractis 54 radicum extractionibus, invenit numerum 1,00000 00000 00000 12781 91493 20032 3442 ejuſque Logarithmum fore 0,00000 00000 00000 05551 11512 31257 82702. Supponatur Logarithmus hic æqualis Aq ſive Br, et ſit qs numerus radicum extractione inventus; erit differentia rs, quâ unitatem ſuperat = ,00000 00000 00000 12781 91493 20032 35.

Horum numerorum ope, Logarithmi reliquorum omnium inveniri poterunt ad hunc modum. Inter datum numerum (cujus Logarithmus inveniendus ſit) et unitatem quærantur (ut ſuperius oſtenſum eſt) medii proportionales, donec tandem inveniatur numerus tantillo unitatem ſuperans, ut unitas præcedat quindecim cyphras, quas totidem vel plures notæ ſignificativæ ſequantur. Sit numerus ille ab, et notæ ſignificativæ, præfixis cyphris, differentiam bc denotabunt. Deinde fiat ut differentia rs ad differentiam bc, ita Br Logarithmus datus ad Bc vel Aa Logarithmum numeri ab; qui itaque dabitur. Hic Logarithmus toties continue duplicatus quoties extractiones factæ ſunt, tandem dabit Logarithmum numeri quæſiti. Hâc etiam ratione inveniri poſſit ſubtangens Logarithmicæ, nempe ſi fiat $rs : Br :: AB$, ſeu unitas : AT ſubtangenti, quæ itaque invenietur 0,43429 44819 03251, per quam denique reliquorum numerorum Logarithmi innoteſcent; nempe
Fig. 5. ſi detur numerus quivis NM ejuſque Logarithmus, et quæratur alterius numeri Logarithmus, qui ad NM ſatis acce-

accedat, fiat ut NM ad fubtangentem XM, ita *no* differentia numerorum ad N*o* differentiam Logarithmorum. Quod fi NM fit unitas = AB, dabuntur Logarithmi, multiplicando differentias minimas *bc* per fubtangentem conftantem AT. Fig. 4.

Hâc ratione invenientur Logarithmi numerorum 2, 3, et 7, et inde dabuntur Logarithmi numerorum 4, 8, 16, 32, 64, &c. 9, 27, 81, 243, &c. item 7, 49, 343, &c. Si a Logarithmo denarii auferatur binarii Logarithmus reftabit Logarithmus quinarii: et proinde dabuntur Logarithmi numerorum 25 125 625 &c.

Numeri ex his compofiti, nempe 6, 12, 14, 15, 18, 20, 21, 24, 28, &c. facile Logarithmis fuis inftruuntur, addendo Logarithmos numerorum componentium.

At numerorum primorum Logarithmos per tot radicum extractiones invenire, moleftum admodum et laboriofum fuit opus. Nec quidem facile fuit, interpolando per differentias primas, fecundas, et tertias &c. Logarithmos fupputare. Quo itaque abfque tantâ moleftiâ numerorum Logarithmi obtineantur, magni viri *Newtonus*, *Mercator*, *Gregorius*, *Wallifius*, et nuper *Halleius* feries infinitas convergentes dederunt, quibus expeditius et certius Logarithmi, ad quot volueris loca fupputati, haberi poffunt. De hifce feriebus eruditum Tractatum fcripfit peritiffimus Geometra *Halleius*, inter Acta Philofophica Societatis Regiæ extantem, ubi feries illas novâ methodo demonftrat, modumque computandi Logarithmos per eas docuit. Liceat hic fubjungere novam feriem, ex quâ expedite et facile fluunt Logarithmi faltem pro numeris majoribus.

Sit z numerus impar, cujus quæritur Logarithmus, numeri $z-1$, $z+1$ erunt pares, et proinde dabuntur eorum Logarithmi, et Logarithmorum differentia, quæ dicatur y. Quinetiam datur Logarithmus numeri, qui eft medius Geometricus inter numeros $z-1$ et $z+1$, æqualis fcil. femifummæ Logarithmorum. Series $y \times \frac{1}{4z} + \frac{1}{24z^3} + \frac{7}{360z^5} + \frac{181}{15120z^7} + \frac{13}{25200z^9}$ &c. erit æqualis Logarithmo rationis, quam habet Geometricus medius inter numeros $z-1$ et $z+1$ ad Arithmeticum medium, fcil. numerum z.

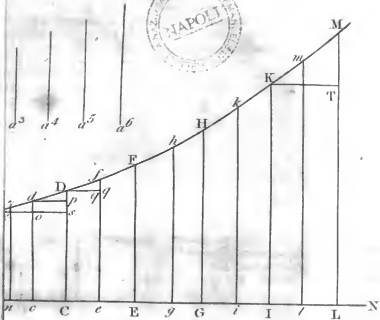
Si numerus fuperat 1000, primus feriei terminus $\frac{y}{4z}$ fufficit

ſufficit ad producendum Logarithmum ad tredecim vel quatuordecim notarum loca; ſecundus terminus dabit Logarithmi loca viginti. At ſi z major ſit quam 10000, primus terminus Logarithmum exhibet ad octodecim figurarum loca, et hinc ejus uſus optimus erit, in ſupplendis Logarithmis Chiliadum a *Briggio* prætermiſſis. Hujus rei capiamus exemplum: ſit inveniendus Logarithmus numeri 20001. Logarithmus numeri 20000 idem eſt ac Logarithmus binarii præfixo Indice 4: et differentia Logarithmorum 20000 et 20002, idem eſt ac differentia Logarithmorum pro numeris 1000 et 10001, ſcil. 0,00004 34272 7687. Hæc differentia ſi per $4z$, ſeu 80004, dividatur, quotiens $\frac{y}{4z}$ erit 0,00000 00005 42813

Huic quoto addatur Log. numeri Geometrici medii, ſumma 4,30105 17093 02416

4,30105 17098 45230

erit Logarithmus numeri 20001. Hinc patet, ut habeatur Logarithmus ad quatuordecim loca, non opus eſſe producere quotum ultra ſex loca. At ſi Logarithmus ad decem tantum figurarum loca habere velis, ut a *Vlacquo* in ſuis tabulis factum eſt, duæ primæ quotientis notæ ſufficiunt. Et ſi hâc methodo computentur Logarithmi pro numeris ſupra 20000; labor omnis vix pluris erit, quam qui in exſcribendis numeris impenditur. Hæc Series ex iis, quæ ab *Halleio* inventæ ſunt, facile ſequitur; qui autem plura de iis ſcire cupit, Præfatum Tractatum adeat et diſcat.


a3
a4
a5
a6
M
m
K
T
k
H
h
F
f
D
d
q
p
o
n
c
C
e
E
g
G
i
I
l
L
N

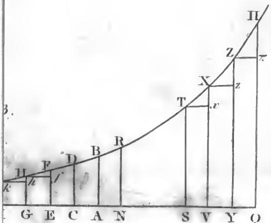

Π
Z
z
X
z
T
x
R
B
D
F
f
H
h
k
G
E
C
A
N
S
V
Y
Q

Fig. 4.

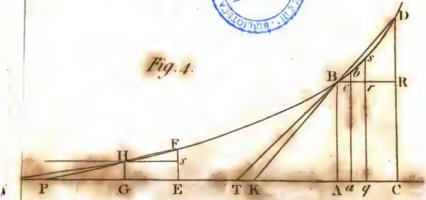
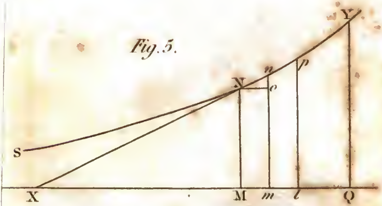


Fig. 5.



J. Basire sc.

APPENDIX.

PROBLEMA nobiliſſimum, de Angulis Trianguli Sphærici ex datis lateribus inveniendis, aliter in Trigonometriâ noſtrâ, quam plerique noſtræ ætatis ſcriptores, reſolutum dedimus; eo potiſſimum omnibus ingenii viribus, quales quales eæ ſint, conniſi, *Copernici* ſcilicet et *Snellii* exemplo, ut Problema e Sphæricis difficillimum ad Trigonometriam planam revocaremus. Neque irrito conamine rem tantam aggreſſi ſumus, neque ſucceſſu uſque infelici. Effecimus enim quod auſpicati ſumus, longe aliâ conſtructione et, ni fallor, ſimpliciore, quam ea fuit, quâ viri illi magni uſi ſunt. Sed cum reſolutionem illam alteram, communi uſu tritam, cui locum in Elementis noſtris Trigonometricis denegavimus, *Keillius* hic loci in exemplum computi Logarithmici attulerit; ne quid in hiſce Libris, ad uſum Juventutis Academicæ deſtinatis, quod Tyronibus obſcurum ſit, relinquamus; illam ipſam reſolutionem, præteritam dudum et neglectam, accurate enarrare et enucleare nunc in nos ſuſcipimus, et ex propriis principiis repetere; luculentius ea ſpero quam a *Keillio* tradita ſunt, abſit invidia dicto, expoſituri.

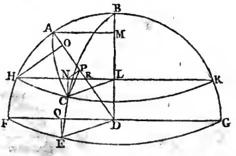
PROP. I.

In omni triangulo ſphærico rectangulum ſub ſinubus crurum eſt ad radii quadratum, ut differentia ſinuum verſorum baſis et differentiæ crurum ad ſinum verſum anguli ad verticem. [Eſt 36. Trig. Sphær. Keillii.]

Sit triangulum ſphæricum A B C, cujus crura B A, B C, baſis A C, vertex B. Polo B, diſtantiâ a polo B C,

M ſcriba-

fcribatur circulus in fuperficie fphæricâ, qui peripheriæ B A in puncto H occurrat. Arcus B H æqualis erit arcui B C; quapropter arcus A H duorum B C, B A differentia erit. Dico rectangulum fub finubus crurum A B, B C ad quadratum ex radio eandem proportionem habere, quam finuum verforum arcuum A C, A H differentia ad finum verfum anguli fphærici A B C, five finum verfum arcûs, qui angulum illum metitur.



Polo B fcribatur circulus fphæræ maximus F E G, cujus peripheria maximi A B peripheriæ in punctis F, G, maximi autem B C in puncto E occurrat. Centrum fphæræ fit D; centrum autem circuli minoris H C K fit L. Juncta F G circulorum maximorum F B G, F E G communis erit interfectio. Quare per centrum fphæræ D tranfibit [a]. Circuli autem minoris H C, maximique F B C communis interfectio fit recta H K. Cum maximus F B G per B polum minoris H C K tranfeat, maximi planum minoris plano ad perpendiculum erit, et planorum communis interfectio, H K, circuli minoris diameter erit [b]: quapropter per centrum ejus L tranfibit. Et cum parallela fint circulorum F E G, H C K plana (propter polum utique B communem [c]) juncta B D per L tranfibit [d], et planis F E G, H C K ad perpendiculum erit [d]. Ad perpendiculum igitur rectis F D, H L, quæ funt in planis illis, et ipfi occurrunt. Recta igitur H L finus eft arcûs B H, five illi æqualis B C. A puncto A in rectam B D ad perpendiculum deducatur A M. Erit A M finus arcûs B A. Jungatur D A, et in rectam D A a puncto H ad perpendiculum deducatur H O. Erit A O finus verfus arcûs A H. A puncto C in planum circuli maximi F B G ad perpendiculum deducatur C N. Et cum plana H C K,

[a] 6 Sph.
[b] 15. Sphær.
[c] Cor. 4.
[d] 10æ Sphær.
[d] 8. Sphær.

H C K, F B G sibi mutuo ad perpendiculum sint, incidet illa C N in communem planorum illorum interfectionem[e], quæ est recta H K. Incidat in puncto N. A puncto N in rectam D A ad perpendiculum deducatur N P, et C P jungatur. Erit C P ad perpendiculum rectæ A D[f]. Recta igitur P A sinus versus est arcûs A C. Sed ostensa est A O sinus versus arcûs A H. Est igitur P O sinuum versorum arcuum A C, A H differentia. A puncto autem E in rectam FG ad perpendiculum deducatur E Q. Erit F Q sinus versus arcûs F E, qui mensura est anguli A B C. Dico igitur rectangulum H L × A M ad quadratum ex D A rationem habere eam, quam recta P O ad rectam F Q.

[e] 38. undecimi.
[f] Cor. 1. 11. undecimi.

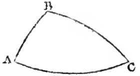
Jungantur E D, C L. Rectæ autem A D, H L sibi mutuo in puncto R occurrant. Jam propter angulos D R L, O R H inter se æquales[g], angulosque D L R, R O H rectos, angulus O H R angulo R D L, sive A D L æqualis erit. Anguli autem ad M et O recti. Triangula igitur A D M, R H O æquiangula inter se sunt, et similia. Est igitur A M ad A D, ut O R ad R H. Sed propter rectas H O, N P parallelas (nimirum cum utraque ad perpendiculum sit rectæ D A) erit O R ad R H, ut O P ad H N[h]. Quare A M est ad A D, ut O P ad H N[i]. Jam vero rectæ H L, F D, cum communes sint plani F B G cum planis parallelis H C K, F E G interfectiones, inter se sunt parallelæ[k]. Pari ratione rectæ L C, D E inter se parallelæ; communes utique plani B C E cum planis parallelis interfectiones. In triangulis igitur C L N, E D Q, anguli E D Q, C L N inter se æquales sunt[l]. Anguli autem D Q E, L N C recti. Triangula igitur æquiangula sunt, et inter se similia. Est igitur L C ad D E, ut L N ad D Q. Vel propter æquales L C, L H, necnon D E, D F; est L H ad D F, ut L N ad Q D. Quare et H N ad F Q, ut L H ad D F[m]. Jam vero cum A M sit ad A D, ut O P ad H N (id enim supra ostensum) et L H ad D F, ut H N ad F Q; idcirco quæ ex rationibus A M ad A D et L H ad D F composita est ratio, eadem erit quæ composita est ex rationibus O P ad H N et H N ad F Q. Sed ex rationibus A M ad A D et L H ad D F composita est ratio rectanguli A M × H L ad rectangulum A D × D F, sive quadratum ex A D. Et ex rationibus O P ad H N et H N ad F Q composita est ratio O P ad F Q. Rectanguli igitur A M × H L ad quadratum ex A D eadem est quæ re-

[g] 15. primi.
[h] 2. sexti.
[i] 11. quinti.
[k] 16. undecimi.
[l] 10. undecimi.
[m] 19. quinti.

ctæ O P ad rectam F Q ratio. In omni igitur triangulo sphærico &c. *Q. E. D.*

Hinc autem sponte enascitur resolutio problematis de Angulis ex datis Lateribus inveniendis ope sinuum versorum: faciendo scilicet, ut sicut rectangulum sub sinubus crurum ad quadratum radii, ita sinuum versorum basis et differentiæ crurum differentia sit ad quartum; qui sane quartus sinus versus erit anguli ad verticem.

Ex. In triangulo sphærico A B C ponamus cum *Keillio* crus alterum B C = 30°; alterum B A = 24° 4′; et basim A C = 42° 8′. Et inveniendus sit angulus ad verticem A B C.



Crurum differentia erit = 5° 56′.

Hisce positis

Log. Sin. B C, comp. Arith.		0.3010300
Log. Sin. B A comp. Arith.		0.3895535
Log. Quad. Rad.		20.
Sinus versus basis A C =	0,2584143	
Sinus vers. arcus diff. crurum =	0,0053572	
Sinuum versorum diff. =	0,2530571	
Differentiæ Log. =	$\bar{1}$.4032185	9.4032185
Log. Sinus versus anguli A B C		10.0938020*

* Manifestum est hunc sinum versum radio majorem esse. Sinus autem versos radio majores in Tabulis frustra quæsiveris, quæ nullos habent. Sed in casu hujuscemodi hâc ratione te expedias. In Tabulis Logarithmorum quæratur Numerus, cujus Logarithmus est sinus versus Logarithmicus, qui ex calculis prodierit; nempe hoc casu 10.0938020. Numerus in Tabulâ inventus sinus versus naturalis erit Logarithmico conveniens. Hunc igitur, sc. 12410863000 diametro naturali 20000000000 detrahe. Relinquetur 7589137000 sinus versus supplementi anguli seu arcûs quæsiti. Unde in Tabulis invenietur supplementum = 76° 2′ 57″. Quare angulus, cujus est supplementum, erit 103° 57′ 3″.

Unde

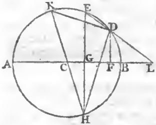
Unde angulus A B C per Tabulas invenietur 103° 57′ 3″.

Cæterum cum in Tabulis recentioribus, iisdemque optimis, utpote quæ peripheriam quadrantis in arcus denorum singulos, vel singulorum etiam, scrupulorum secundorum divisam exhibent; cum in hujusmodi inquam Tabulis, sinus tantum et tangentes inveniantur, sinubus versis et secantibus consulto scilicet omissis, ne accessione eorum, quæ minus necessaria sunt, moles librorum ultra modum cresceret; cumque alii libri, qui sinus etiam versos habent, perrari sint hodie, nec facile comparandi; expedit, ut quæstiones omnes Trigonometriæ ad sinuum et tangentium analogias redigantur. Hoc autem in problemate proposito ope sequentium Theorematum præstandum est.

PROP. II.

Si duo sint arcus circuli inæquales, rectangulum sub diametro et sinuum versorum differentiâ æquale est rectangulo sub duorum summæ differentiæque chordis.

Circuli cujus centrum C, diameter recta A C B, sint arcus duo inæquales B D, B E. A punctis D, E in rectam A B ad perpendiculum deducantur D F, E G. Erunt F B, G B arcuum B D, B E sinus versi, eritque F G sinuum versorum differentia. Producta E G peripheriæ iterum in H occurrat. Arcus H B arcui B E æqualis erit. Unde arcus H B D duorum B D, B E summæ æqualis erit, cum sit E D eorundem differentia. Junctis igitur H D, D E, dico rectangulum A B × G F rectangulo D H × D E æquale esse. Juncta enim H C peripheriæ iterum in K occurrat. Jungatur K D, et E D producta productæ C B in L occurrat. Anguli H K D, L E H æquales sunt; cum uterque ad circuli peripheriam arcui D B H insistat. Anguli autem H D K, L G E sunt recti. Triangula igitur K H D, E L G æquiangula sunt, et inter se similia. Erit igitur K H ad H D, ut E L ad L G. Sed propter parallelas D F, E G, ut E L ad L G, ita est E D ad G F.



ª 2. ſexti. G F[a]. Erit igitur K H ad H D, ut E D ad G F. Quapropter rectangulum K H × G F, vel A B × G F rectangulo D H × D E æquale eſt. *Q. E. D.*

Cor. Rectangulum ſub dimidio radio et differentiâ ſinuum verſorum æquale eſt rectangulo ſub ſinu ſemiſummæ et ſinu ſemidifferentiæ duorum arcuum. Etenim in figurâ dimidius radius, ſeu $\frac{1}{2}$ C B, pars quarta eſt diametri A B. Quare et rectangulum $\frac{1}{2}$ C B × G F pars quarta eſt rectanguli A B × G F. Sinus autem dimidii arcûs D H ſemiſſis eſt chordæ D H, et ſinus dimidii arcûs E D ſemiſſis chordæ E D. Rectangulum igitur ſub ſinubus illis pars quarta eſt rectanguli ſub chordis D H, D E. Eſt igitur rectangulum $\frac{1}{2}$ C B × G F ad rectangulum ſub ſinubus dimidiorum arcuum H D, D E,
º 15. quinti. ut rectangulum A B × G F ad rectangulum D H × D E[o]. Rectangulum autem A B × G F rectangulo D H × D E æquale eſt. Quare rectangulum $\frac{1}{2}$ C B × G F rectan-
ᵖ Schol. 14. quinti. gulo ſub ſinubus dimidiorum arcuum æquale[p]. *Q. E. D.*

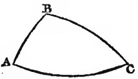
PROP. III.

Rectangulum ſub dimidio radio et ſinu verſo cujuſlibet arcûs æquale eſt quadrato ex ſinu arcûs dimidii.

Nam rectangulum ſub ſinu verſo et dimidio radio pars quarta eſt rectanguli ſub eodem ſinu verſo et diametro. Et quadratum ex ſinu arcûs dimidii pars quarta eſt quadrati ex chordâ. Sed rectangulum ſub ſinu verſo et diametro æquale eſt quadrato ex chordâ. Quare rectangulum ſub ſinu verſo et dimidio radio æquale eſt quadrato ex ſinu arcûs dimidii. *Q. E. D.*

Hiſce autem oſtenſis, analogia propoſitionis primæ ad ſinuum analogiam facile revocatur.

Trianguli Sphærici B A C puta latera B A, B C data eſſe, et baſin etiam A C datam; et inveniendus ſit angulus ad verticem A B C. Angulus ille ſignificetur literâ V. Latera B A, B C literis *l*, L; eorundem differentia literâ D. Baſis A C literâ B. Differentia ſinuum verſorum arcuum B et D ſignificetur literâ E. Radius denique literâ R. Jam ſin.



l ×

$l \times$ fin. L : R. quad. = E : fin. verf. V (per Prop. 1.) Quare fin. $l \times$ fin. L : $R^2 = \frac{1}{2}$ R $\times$ E : $\frac{1}{2}$ R $\times$ fin. verf. V.

Sed $\frac{1}{2}$ R $\times$ E = fin. $\frac{B+D}{2} \times$ fin. $\frac{B-D}{2}$ (per Cor. prop. 2ᵃᵉ). Et $\frac{1}{2}$ R $\times$ fin. verf. V = quadr. fin. $\frac{1}{2}$ V. (per prop. 3.) Erit igitur fin. $l \times$ fin. L : R^2 = fin. $\frac{B+D}{2}$ $\times$ fin. $\frac{B-D}{2}$: quadr. fin. $\frac{1}{2}$ V. Per hanc analogiam datur quadratum ex finu dimidii anguli V. Et ex quadrato dato datur finus cujus eft quadratum. Et ex finu anguli $\frac{1}{2}$ V dato, per tabulas datur angulus $\frac{1}{2}$ V. Et ex dimidio dato totus datur. Et hæc eft refolutio Problematis vulgari ufu trita.

Ex. Ponatur B C, feu L = 30°. A B, feu l, = 24° 4. Et bafis A C, feu B, = 42° 8′. Erit arcus D = 5° 56″. $\frac{B+D}{2}$ = 24° 2′. $\frac{B-D}{2}$ = 18° 6′.

Log. Sin. L. Comp. Arithm.	0.3010300
Log. Sin. l. Comp. Arithm.	0.3895535
Log. R^2	20.
Log. Sin. $\frac{B+D}{2}$	9.6098803
Log. Sin. $\frac{B-D}{2}$	9.4923083
Log. $\overline{\text{Sin.}}|^2$ anguli $\frac{1}{2}$ V	19.7927721
Log. Sin. anguli $\frac{1}{2}$ V	9.8963860

Hinc $\frac{1}{2}$ V = 51 58′ 31″.
Quare V = 103° 57′ 2′.

ADDENDA

IN

DATIS.

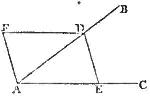
PROP. XIX.

*Cor.** Si prima ſecundâ major ſit, datâ, quam in ratione, ſecunda autem ad tertiam datam rationem habeat; erit prima eâdem tertiâ major, datâ, quam in ratione.

PROP. XXXII.

*Cor.** Recta linea magnitudine data, duabus rectis, non parallelis ſed poſitione datis, in datis angulis interpoſita, poſitione data eſt.

Duabus rectis A B, A C, non parallelis ſed poſitione datis, interpoſitam puta rectam D E, magnitudine datam, in angulis A D E, A E D datis. Dico rectam D E poſitione datam. Rectæ enim B A, C A ſibi mutuo in puncto A occurrant. Per A et D ducantur A F, D F rectis D E, A E parallelæ, quæ ſibi mutuo in puncto F occurrant. Propter rectas A B,



A C poſitione datas punctum A datum eſt[a]. Angulus a 25. dat.
autem D A F datus, dato nimirum A D E æqualis[b]. Re- b 29. primi.
cta igitur A F, a dato puncto A in rectâ A B poſitione
datâ, in dato angulo D A F educta, poſitione data eſt[c]. c 29. dat.
Sed magnitudine etiam data A F, utpote quæ datæ D E
æqualis eſt[d]; punctumque A datum. Datum igitur d 34. primi.
punctum F[e]. Recta igitur F D, per datum punctum F e 27. dat.
contra rectam A C, poſitione datam, ducta, poſitione data

N eſt.

[f] 28. dat. eft [f]. Sed A B etiam pofitione data [g]. Quare punctum
[g] ex hyp. D datum [h]. Recta igitur D E per datum punctum D
[h] 25. dat. ducta eft contra rectam F A pofitione datam. Recta igi-
[i] 28. dat. tur D E pofitione data [i]. *Q. E. D.*

PROP. LIX.

*Cor.** 2. Si duæ rectæ datum fpatium comprehendunt in angulo dato, duarumque five fumma five differentia data fit, utraque etiam data erit.

SCHOLION.

Cæterum per has propofitiones (58 et 59) opus conftruendi æquationes quadraticas, cujufcunque formæ, revocatur ad duo illa problemata Elementi Sexti, de dato fpatio ad datam rectam applicando, cum exceffu vel defectu figuræ datæ, et ad cafus quidem problematum illorum facillimos, quando fpatium in recto angulo applicandum fit cum exceffu vel defectu quadrati. Puta enim datum effe rectangulum fub rectis A B, B C, quarum fumma etiam A C data. Data A C, ponatur a. Datum rectangulum A B $\times$ B C fit d^2. Recta autem B C dicatur x. Erit igitur A B $= a - x$. Et A B $\times$ B C erit $a x - x^2$. Quare $a x - x^2 = d^2$. Quæ eft æquatio quadratica, cujus radices funt A B, B C; quæ invenientur applicando ad datam A C fpatium datum d^2 in angulo recto cum defectu quadrati.



Rurfum datum puta rectangulum fub rectis A B, B C, quarum differentia etiam A C data. Data A C ponatur a. Datum rectangulum A B $\times$ B C fit d^2, et B C dicatur x. Erit igitur A B $= a + x$, et A B $\times$ B C erit $ax + x^2$. Quare $a x + x^2 = d^2$. Quæ eft æquatio quadratica, cujus radices funt B C, A B.



Vel fi A B dicatur x, erit B C $= x - a$ et A B $\times$ B C erit $x^2 - a x$. Quare $x^2 - a x = d^2$, quæ eft æquatio quadratica, cujus radices eædem illæ B C, A B. Hæ autem inveniuntur applicando ad datam A C fpatium datum d^2, in angulo recto cum exceffu quadrati.

Propofitâ igitur æquatione quadraticâ hujus formæ $x^2 - a x + d^2 = o$ (quæ tranfponendo fit $a x - x^2 = d^2$) ex-

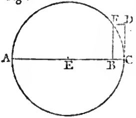
exponatur recta A C æqualis datæ a. Ad A C applicetur rectangulum ſpatio d^2 æquale, cum defectu quadrati. Et latitudo defectûs ſit B C. Erunt A B, B C radices.

Propoſitâ autem æquatione quadraticâ hujus formæ $x^2 + ax - d^2 = 0$, vel $x^2 - ax - d^2 = 0$, exponatur rurſum recta A C æqualis datæ a. Et ad datam A C applicetur rectangulum ſpatio d^2 æquale, cum exceſſu quadrati. Latitudo autem exceſſûs ſit B C. Erunt A B, B C radices.

Cæterum applicationes illæ rectanguli, cum exceſſu vel defectu figuræ quadratæ, quâ ratione facillime efficiendæ ſint, rem nec ingratam ſpero nec inutilem tyronibus fecero, ſi monſtraverim; cum utriuſque problematis compoſitio, quæ ab Euclide in Elemento ſexto tradita eſt, generalis cum ſit, neceſſario operoſior eſt.

Ad rectam igitur A C, magnitudine et poſitione datam, applicandum ſit rectangulum dato ſpatio æquale, cum defectu vel exceſſu quadrati.

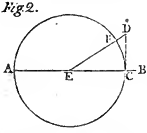
Fig. 1



Media dividatur recta A C in E. Centro E, intervallo E C vel E A, deſcribatur circulus A F C. Per C ducatur C D, quæ circulum in ipſo puncto C contingat. Et in contingente capiatur C D, cujus quadratum æquale ſit dato ſpatio applicando.

Jam ſi rectangulum, cum defectu quadrati, applicandum ſit, in fig. 1, ducatur per D recta D F, ipſi A C parallela, quæ circuli peripheriæ in F occurrat. Per F ducatur F B ipſi D C parallela, quæ rectæ A C in B occurrat.

Fig. 2.



Si cum exceſſu quadrati, rectangulum applicandum ſit, in fig. 2, jungatur E D quæ circulo in F occurrat. In E C productâ capiatur E B ipſi E D æqualis. Dico in utrâque figurâ rectangulum A B × B C problemati ſatisfacere.

Nam in figurâ 1ª, propter circulum, A B × B C = B F².

BF^2. Sed $BF^2 = CD^2 =$ ſpatio dato applicando. Rectangulum igitur $AB \times BC$ ſpatio dato æquale eſt, et ad rectam AC applicatum quadrato ex BC deficit. In figurâ 2. rectangulum $AB \times BC = EB^2 - EC^2 = ED^2 - EC^2 = CD^2 =$ ſpatio dato applicando. Rectangulum igitur $AB \times BC$ ſpatio dato æquale eſt, et ad rectam AC applicatum quadrato ex BC excedit.

IN ADDITAMENTO DATORUM.

PROP. IX.

Cor. 2. Si linea recta A B, magnitudine et poſitione data, extremâ et mediâ ratione ſecetur in puncto C, punctum C datum eſt.

FINIS PARTIS SECUNDÆ.